DD 法および SVD 法の交通振動への適用性に関する基礎的検討

筑波大学大学院システム情報工学研究科　学生会員　○浅川　一樹
筑波大学システム情報系　正会員　山本　亨輔
筑波大学大学院システム情報工学研究科　学生会員　石川　幹生

1.　研究背景

橋梁の健全性評価手法のとして，交通振動分析による検討が進んでいる．本研究では，FDD（Frequency Domain Decomposition：周波数領域分解）法および SVD（Singular Value Decomposition：特異値分解）法において，数値計算により，トラス橋の交通振動を再現し，それぞれの適用性を検討した.

2.　分析手法

2.1　FDD 法による分析

構造物の多点計測で得られる FRF（Frequency Response Function： 周波数応答関数）行列$\mathbf{H}(\omega)$は，各点の加振力$\boldsymbol{F}(\omega)$および振動応答$\boldsymbol{Y}(\omega)$を用いて,

$$\boldsymbol{Y}(\omega)=\mathbf{H}(\omega)\boldsymbol{F}(\omega) \tag{1}$$

である．交通振動計測においては，$\boldsymbol{Y}(\omega)$が橋梁応答であり，$\boldsymbol{F}(\omega)$は交通荷重に対応する．$\boldsymbol{Y}(\omega)$のクロスパワースペクトル$\mathbf{G}_{\boldsymbol{YY}}(\omega)$は，次式で表される.

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{\boldsymbol{YY}}(\omega)&=\mathbf{H}(\omega)\boldsymbol{F}(\omega)\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}(\omega)\mathbf{H}^{\mathrm{H}}(\omega)\\&=\mathbf{H}(\omega)\mathbf{G}_{\boldsymbol{FF}}(\omega)\mathbf{H}^{\mathrm{H}}(\omega)\end{aligned} \tag{2}$$

今，加振力$\boldsymbol{F}(\omega)$が未知であるため，そのクロスパワースペクトル行列$\mathbf{G}_{\boldsymbol{FF}}(\omega)$も未知である．そこで，各点での加振力が同じ周波数成分持たず，パワー平均が周波数と加振点に依らず一定であるような特性を仮定する．この仮定より，式(3)が成り立つ.

$$\mathbf{G}_{\boldsymbol{FF}}(\omega)=\begin{bmatrix}f^2&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&f^2\end{bmatrix}=f^2\mathbf{I} \tag{3}$$

長江ら[1]は極 - 留数モデルを用いて，が$\mathbf{G}^{+}_{\boldsymbol{YY}}(\omega)$が FRF と同様のモーダルパラメータに関する情報を持っていることを次式のように示した.

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{\boldsymbol{YY}}(\omega)&=f^2\mathbf{H}(\omega)\mathbf{H}^{\mathrm{H}}(\omega)\\&=f^2\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{\boldsymbol{\phi}_r\boldsymbol{\phi}_r^{\mathrm{H}}}{j\omega-\lambda_r}+\frac{\boldsymbol{\phi}_r^*\boldsymbol{\phi}_r^{\mathrm{T}}}{j\omega-\lambda_r^*}+\frac{\boldsymbol{\phi}_r\boldsymbol{\phi}_r^{\mathrm{H}}}{-j\omega-\lambda_r}+\frac{\boldsymbol{\phi}_r^*\boldsymbol{\phi}_r^{\mathrm{T}}}{-j\omega-\lambda_r^*}\right)\end{aligned} \tag{4}$$

ここで，クロスパワースペクトル行列$\mathbf{G}_{\boldsymbol{YY}}(\omega)$の正の遅延成分$\mathbf{G}^{+}_{\boldsymbol{YY}}(\omega)$は式(5)となる.

$$\mathbf{G}^{+}_{\boldsymbol{YY}}(\omega)=f^2\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{\boldsymbol{\phi}_r\boldsymbol{\phi}_r^{\mathrm{H}}}{j\omega-\lambda_r}+\frac{\boldsymbol{\phi}_r^*\boldsymbol{\phi}_r^{\mathrm{T}}}{j\omega-\lambda_r^*}\right) \tag{5}$$

Brincker ら[2]は$\mathbf{G}^{+}_{\boldsymbol{YY}}(\omega)$に SVD 法を適用することでモード形状を求めた．本研究では，Brincker らの方法に従い,

$$\mathbf{G}^{+}_{\boldsymbol{YY}}(\omega_i)=\mathbf{U}_i\mathbf{S}_i^{+}\mathbf{U}_i^{\mathrm{H}} \tag{6}$$

ここで，$\mathbf{U}_i$はユニタリ行列であり，各列がモード形状ベクトル$\boldsymbol{\phi}_r$の推定値$\widehat{\boldsymbol{\phi}}_r$から成る．また，$\mathbf{S}_i^{+}$は特異値を対角成分に持つ対角行列である.

FDD 法を適用すれば，交通荷重作用下での橋梁振動特性が，損傷変化によりどのように変化するか確認できる．ただし，式(3)に示すような外力の白色性の仮定が必ずしも満たされているとは限らず，結果の信頼性には限界がある.

2.2　SVD 法

多点計測で得られた時刻歴データを

$$\mathbf{Y}(\omega)=[\,\boldsymbol{y}(t_0)\;\boldsymbol{y}(t_1)\;\cdots\;\boldsymbol{y}(t_N)\,] \tag{7}$$

とデータ行列化し，直接 SVD 法を適用する.

$$\mathbf{Y}(\omega)=\mathbf{USV^T}=\mathbf{UQ} \tag{2}$$

このとき$\mathbf{U}$はモード形状推定値となる．FDD 法がすべての周波数で計測点と同じ数のモード形状を推定するのに対して，SVD 法では計測点数と同じ数のモード形状を一度だけ推定する.

SVD 法では，基準座標である$\mathbf{Q}$の無相関性（$\mathbf{QQ^T}$が対角行列）を仮定しているが，この仮定も交通振動分析においては，必ずしも満たされていると限らない.

2.3　今回の分析手法

そこで本研究では FDD 法と SVD 法で得られる結果を健全時と損傷時のそれぞれのケースで比較し，損傷による推定結果の変化を調べた．比較には MAC 値を用いた.

キーワード　交通振動分析，橋梁振動
連絡先　〒305-8573　つくば市天王台 1-1-1

表-1　橋梁モデルのパラメータ

トラス部材	密度	$7800[kg/m^3]$
	断面積	$0.02[m^2]$
	ヤング率	$200 \times 10^9[Pa]$
	せん断弾性係数	$78 \times 10^9[Pa]$
	断面二次モーメント	$1.0 \times 10^{-4}[m^4]$
	断面二次極モーメント	$1.0 \times 10^{-6}[m^4]$
床板	縦方向要素分割数	20
	横方向要素分割数	10
	密度	$2400[kg/m^3]$
	厚さ	$0.4[m]$
	ヤング率	$25 \times 10^9[Pa]$
	ねじり剛性	$1.1 \times 10^9[Pa \cdot m]$
	縦方向断面二次モーメント	$0.03[m^4]$
	横方向断面二次モーメント	$0.2[m^4]$

表-2　車両モデルのパラメータ

車体質量	$18000[kg]$
車体慣性モーメント(ピッチ方向)	$65000[kg \cdot m^2]$
車体慣性モーメント(ロール方向)	$15000[kg \cdot m^2]$
車輪上減衰定数	$10000[kg/s]$
車輪上バネ定数	$1000000[kg/s^2]$
車輪質量	$1100[kg]$
車輪下減衰定数	$30000[kg/s]$
車輪下バネ定数	$3500000[kg/s^2]$
長さ（重心-車輪間）	$1.875[m]$
幅（重心-車輪間）	$0.9[m]$

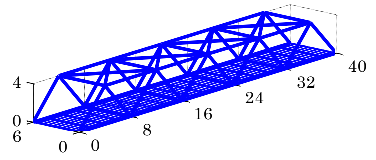


図-1　橋梁モデル

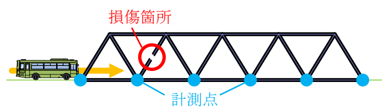


図-2　橋梁モデルの損傷箇所と計測点

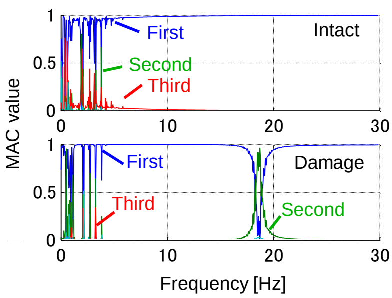
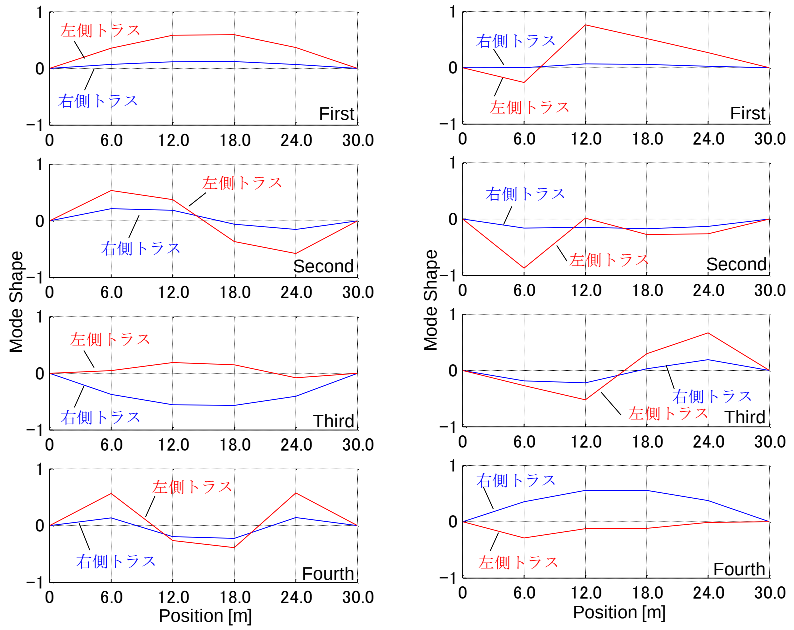


図-4　モード形状の MAC 値



(a) Intact　　(b) Damage

図-3　SVD 法を用いた橋梁のモード形状推定値

3.　検討方法

本研究では，トラス部材の破断が FDD 法および SVD 法の推定結果に及ぼす影響を検討するため，VBI（Vehicle-Bridge Interaction：車両ー橋梁相互作用）システムモデルを用いた数値シミュレーションを実施した．路面凹凸は実計測路面を参考にランダム発生させた．トラス橋のモデルを**図-1**，トラス部材の破断箇所と加速度計測点を**図-2** に示す．計測点はそれぞれ両車線側に対称に設置し，車両は左側通行である．各パラメータを**表-1**，**表-2** に示す．

4.　検討結果とまとめ

数値シミュレーションによって得られた加速度に特異値分解を適応し，モード形状を推定した．**図-3** はそれぞれの車線側の正常時と損傷時の推定モード形状の一例である．損傷が推定モード形状に強く影響を与えているのが分かる．

また，特異値分解と FDD 法の推定モード形状を比較した MAC 値を**図-4** に示す．MAC 値は 1 に近いほど，形状が近いことを表している．損傷時において，20Hz 付近で励起しているモードが 1 位と 2 位で逆転している．一方，フーリエスペクトル上では 20Hz 付近における損傷変化は見いだせないことを確認している．二つの分析手法を比較することにより，損傷の影響をより顕著に確認することができる可能性がある．

謝辞：本研究の一部は，科学研究費補助金（若手研究(B)，課題番号 25820200）によって実施した．ここに記し謝意を表する．

参考文献

1) 長江信顕，渡瀬正泰，玉木利裕：相互相関関数を用いた実稼働モード解析，構造工学論文集 Vol.57A，pp.232-241，2011.

2) Rune Brincker, Lingmi Zhang and Palle Andersen: Modal identification of output-only systems using frequency domain decomposition , Proceeding of SPIF , the International Society for Optical Engineering,Vol.4359 (1) , pp.698-703, 2001.