

鉄道軌道の水平変位に関する臨界速度の外乱鋭敏性

新潟大学大学院自然科学研究科 学生員 丸山 聖司
 新潟大学工学部建設学科 正会員 阿部 和久
 新潟大学大学院自然科学研究科 正会員 紅露 一寛

1. はじめに

列車の走行速度が地盤の Rayleigh 波速度に達すると、軌道の鉛直変位が増大する。この速度は臨界速度と呼ばれている。また、ロングレールの温度上昇により発生する軸力が臨界速度に及ぼす影響については Labra¹⁾により検討されており、軸力増加と共に臨界速度が低下し、最終的には静的座屈に至ることが示されている。一方、軌道水平振動に対する臨界速度については Metrikine & Dieterman²⁾が検討しており、軸力作用下での臨界速度が鉛直振動のそれより低下し得ることを明らかにしている。

しかし、実軌道の初期不整存在下での静的座屈荷重は、これら臨界速度低下が顕著となる軸力より一般に低く、彼らの理論によればそれが影響する可能性は低いという結論に至る。ただし、既往の研究では道床横抵抗力の非弾性的挙動が考慮されていない。当該非線形性の存在により、静的座屈は初期不整鋭敏性を示す。すると、この延長上にある臨界速度 軸力関係も動的擾乱に対して鋭敏性を有するものと考えられ、座屈荷重より低い軸力下で臨界速度に達する可能性も出てくる。本研究では、上述の非線形性が軌道水平振動の臨界速度 軸力関係に及ぼす影響を理論的に調べる。また数値実験によりその妥当性について検証する。

2. 検討手法

(1) 分散解析に基づく理論的検討

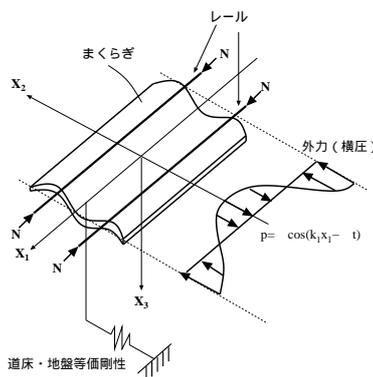


図 1 外乱が作用する無限長レール

本研究では臨界速度を、軌道長手方向波数-周波数空間における分散曲線に接し原点を通過する直線の傾きにより求める²⁾。そのため、レールに作用する水平荷重(擾乱) p と

それに対する水平変位定常解 w を次式で与える。

$$\begin{aligned} p &= \varepsilon \cos(k_1 x_1 - \omega t) \\ w &= \delta \cos(k_1 x_1 - \omega t) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 ε と δ はそれぞれ水平力と変位の振幅、 k_1 は軌道軸方向波数、 ω は円振動数である。

図 1 のように、軸力 N (圧縮を正) を受けるレールに、水平力 p が作用している問題を考える。このときのレールの運動方程式は次式で与えられる。

$$2EIw'''' + 2Nw'' + \alpha w - \beta w^3 + m\ddot{w} = p \quad (2)$$

ここで、 EI はレールの水平曲げ剛性、 m は軌道の単位長さ当りの質量である。 α および β は道床における非弾性挙動を考慮した道床・地盤系の等価剛性における線形および非線形項を表している。

式 (2) における w^3 の非線形項を次式により変形し、 $\cos(k_1 x_1 - \omega t)$ の項を抽出する。

$$\cos^3(k_1 x_1 - \omega t) = \frac{3}{4} \cos(k_1 x_1 - \omega t) + \frac{1}{4} \cos 3(k_1 x_1 - \omega t) \quad (3)$$

式 (1) を式 (2) に代入し、式 (3) より $\cos(k_1 x_1 - \omega t)$ に関する項について整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} 2k_1^2(N_R - N)\delta - \frac{3\beta}{4}\delta^3 - \varepsilon &= 0 \\ N_R &= EIk_1^2 + \frac{1}{2k_1^2}(\alpha - m\omega^2) \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 N_R は微小振幅下でのレールの共振時軸力である。 N 、 k_1 一定の下、増分 $\Delta\omega$ の下での振幅増分の共振条件 $\frac{\partial \omega}{\partial \delta} = 0$ とおくと、次式を得る。

$$k_1^2(N_R - N) = \frac{9\beta}{8}\delta^2 \quad (5)$$

式 (4),(5) より δ を消去して次式を得る。

$$k_1^2(N_R(k_1, \omega) - N) = \frac{9\beta}{8} \left(\frac{2\varepsilon}{3\beta} \right)^{2/3} \quad (6)$$

式 (6) は $N, \varepsilon, k_1, \omega$ をパラメータとしており、ある N, ε に対する (k_1, ω) 空間の分散曲線の擾乱鋭敏性を与える。

Key Words: 軌道, 非線形性, 臨界速度, 擾乱鋭敏性, レール軸力

連絡先: 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地 TEL 025 (262) 7028 FAX 025 (262) 7021

(2) 応力履歴を考慮した定常応答解析

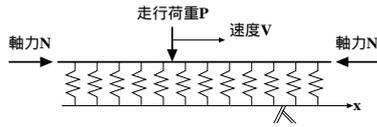


図 2 走行荷重が作用する Winkler ばり

(1) に展開した理論の妥当性を検証するため、図 2 のように、軸力を受ける十分に長い Winkler ばりに一定速度 V で走行する集中荷重 P が作用する問題を設定する。

運動方程式を重み付き残差式で表した上で離散化すると、移動座標 $\xi = x - Vt$ における定常解は次式をみだす。

$$[K_1]\{w\} - (N + \rho AV^2)[K_2]\{w\} - \eta V[C]\{w\} = P\{1\} - \{f(w)\} \quad (7)$$

ここで、 $\{1\}$ は $\xi = 0$ の節点で 1、それ以外で 0 となる外力ベクトルである。 $\{f(w)\}$ は有限要素 1 要素当りの道床からの分布作用力である。 $\{f(w)\}$ は道床横抵抗力の非線形性を考慮し、以下のように評価する。

レールを支持している道床各点の変位-応力履歴は、定常状態下では全て同一となる。また、ある点 x の時刻 t における作用力は、定常解の点 $\xi = x - Vt$ における作用力と一致する。

$$f(x, t) = f(x - Vt) \quad (8)$$

式 (8) より、 $f(x, t)$ の時間積分は空間方向の積分により次式で評価できる。

$$\begin{aligned} f(x, t) &\approx f(x, t - \Delta t) + \dot{f}(x, t)\Delta t \\ &= f(x - Vt + V\Delta t) + \frac{df}{dw} \frac{\partial w}{\partial \xi} \Delta \xi \\ &= f(\xi + \Delta \xi) + \frac{df}{dw}(\xi)\Delta w \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $\Delta \xi$ を要素長とすれば、 $f(\xi + \Delta \xi)$ は右隣の節点における作用力を与える。よって第 i 番節点の作用力 f_i は右隣の節点における作用力 f_{i+1} と変位 w_i を用いて次式で与えられる。

$$f_i = f_{i+1} + \frac{df}{dw} \Big|_i (w_i - w_{i+1}) \quad (10)$$

式 (10) により、一連の節点変位を 1 つの非線形ばねの時刻歴と見なすことで、非線形定常解における作用力を求めることができる。以上の設定下で、式 (7) の解を Newton-Raphson 法により求める。

3. 解析結果

レールは 60kg レールを対象とする。また、定常応答解析では、レール全長は 200m とした。なお、分散解析では剛

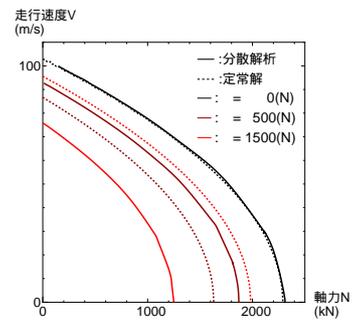


図 3 軸力-臨界速度曲線

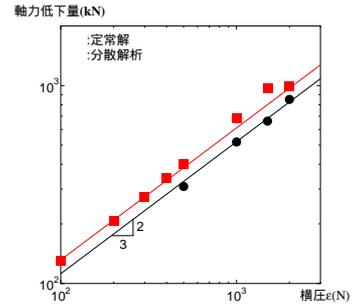


図 4 水平力振幅と軸力低下量との関係

な地盤と軟弱な地盤の両方で解析を行ったが、ここでは定常応答解析結果と比較するため、剛な地盤の解析結果のみを示す。道床の等価剛性を表す α, β は文献³⁾における道床横抵抗力を参考に与える。この場合、 α, β は定数となり、式 (6) より臨界状態を与える軸力は水平力振幅 ε の $2/3$ 乗に比例した鋭敏性を有する。軸力-臨界速度関係に ε が及ぼす影響を図 3 に示す。図 3 より、定常解および分散解析どちらの結果も類似した曲線の概形を示し、 ε の値の増加と共に、曲線が低軸力側に移動する様子が確認できる。この結果から、分散解析に基づく理論の妥当性が確認できる。

$V=60$ (m/s) において臨界速度を与える軸力の低下量と ε との関係を図 4 に示す。図中の直線は、 $\varepsilon^{2/3}$ に概ね比例する傾きを示しており、数値実験においても微小な水平力下で軸力が大きく低下する鋭敏性が認められ、本理論を裏付ける結果を得ることができた。

図 3 には $\varepsilon = 1500$ N までの結果を示したが、実際の軌道でははるかに大きな横圧がレールに作用し得る。以上より、初期不整合存在下の静的座屈荷重 (1000 ~ 1500kN) 以下の軸力でも、営業運転速度で臨界状態に達する可能性が示唆された。

参考文献

- 1) Labra, J.J.: An axially stressed railroad track on an elastic continuum subjected to a moving load, Acta Mechanica, 22, 113-129, 1975
- 2) Metrikine, A.V. and Dieterman, H.A.: Lateral vibrations of an axially compressed beam on an elastic half-space due to a moving lateral load, Eur. J. Mech. A/Solids 18, 147-158, 1999
- 3) 宮井 徹: エネルギー法による軌道座屈の数値解析, 鉄道技術報告大 1271 号, 1984