異方性飽和多孔質弾性体の3次元波動問題に対する Laplace 像空間における基本解

○東京工業大学大学院　正会員　古川　陽
群馬大学大学院　正会員　斎藤隆泰
東京工業大学大学院　正会員　廣瀬壮一

1.　はじめに

地中の岩盤は，岩石の生成過程や封圧を受けることで生じる配向性のき裂により異方性を有することが知られている．また，岩盤は多孔質体であり，地中ではその間隙が地下水などの間隙流体で飽和した状態である場合が多い．この様な媒質は異方性飽和多孔質弾性体と呼ばれ，その代表的な力学モデルは Biot によって提案されている [1)]．著者らのグループでは，これまで，異方性飽和多孔質弾性体の波動解析のための境界要素法の開発を 2 次元問題に対して行っており [2)]，現在は 3 次元問題に対する境界要素法の開発に取り組んでいる．本稿では，そのうち，異方性飽和多孔質弾性体の 3 次元波動問題に対する基本解の導出とその妥当性の検証について述べる．なお，ここでは特に断りのない限り，大文字の下付き添え字は $1,2,3,4$，小文字の下付き添え字は $1,2,3$ をとり，1 つの項の中に繰返し現れる添え字に関しては総和規約を適用する．

2.　異方性飽和多孔質弾性体

Biot によって提案された異方性飽和多孔質弾性体の構成方程式は，全応力 σ_{ij} および間隙流体の圧力 p に対して，それぞれ以下の式で与えられる [1)]．

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}u_{k,l} + \alpha_{ij}Mw_{k,k} \tag{1}$$
$$p = -\alpha_{kl}Mu_{k,l} - Mw_{k,k} \tag{2}$$

ただし，全応力は引張を正，間隙流体の圧力は圧縮を正としている．$(\ )_{,i}$ は x_i 方向に関する空間微分を表し，w_i は単位断面積を通過する間隙流体の流量であり，間隙率 β を用いて $w_i = \beta(U_i - u_i)$ で与えられる．また，式 (1), (2) において，M は Biot の弾性定数，α_{ij} は異方性を考慮した場合の Biot の有効応力係数を表す．さらに，A_{ijkl} は非排水条件における飽和多孔質弾性体の弾性定数であり，$A_{ijkl} = C_{ijkl} + \alpha_{ij}\alpha_{kl}M$ で与えられる．ただし，C_{ijkl} は排水条件における飽和多孔質弾性体の弾性定数を表す．

異方性飽和多孔質弾性体の運動方程式は，次式で与えられる [1)]．

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho\ddot{u}_i + \rho_f\ddot{w}_i \tag{3}$$
$$p_{,i} + \rho_f c_i = -\rho_f\ddot{u}_i - m_{ij}\ddot{w}_j - \eta r_{ij}\dot{w}_j \tag{4}$$

ここに，ρ_f は間隙流体の密度，ρ は固体骨格部と間隙流体の混合物の密度であり，固体骨格部の密度 ρ_s を用いて $\rho = (1-\beta)\rho_s + \beta\rho_f$ で与えられる．また，$\dot{(\ )}$ は時間に関する微分，b_i および c_i は混合物および間隙流体に働く物体力を表す．m_{ij} は間隙の幾何形状によって決定される質量マトリクスである．η は間隙流体の粘性係数，r_{ij} は流れ抵抗マトリクスを表す．そのため，式 (4) の右辺第 3 項は，流体の粘性によって生じる散逸項を表している．

3.　Laplace 像空間における基本解

異方性飽和多孔質弾性体の 3 次元波動問題に対する基本解 $\hat{U}_{IK}$ は，Laplace 像空間の場合，次式で与えられる．

$$\hat{L}_{PQ}\hat{U}_{QK}(\mathbf{x},\mathbf{y},s) = -\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta_{PK} \tag{5}$$

ここに，

$$\hat{L}_{IK} = \begin{bmatrix} [C_{ipkq}\partial_p\partial_q - \tilde{\rho}_{ik}s^2] & \{-\tilde{\alpha}_{ip}\partial_p\} \\ \{\tilde{\alpha}_{kq}\partial_q\}^{\mathrm{T}} & -\dfrac{1}{s^2}Y^{-1}_{pq}\partial_p\partial_q + \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} \tag{6}$$

であり，$\delta(\mathbf{x})$ はデルタ関数，δ_{IK} は Kronecker デルタを表す．また，$\partial_p = \partial/\partial x_p$ であり，

$$\tilde{\alpha}_{ip} = \alpha_{ip} - \rho_f Y^{-1}_{ip} \tag{7}$$
$$\tilde{\rho}_{ik} = \rho\delta_{ik} - \rho_f^2 Y^{-1}_{ik} \tag{8}$$
$$Y_{ik} = m_{ik} + \frac{1}{s}\eta r_{ik} \tag{9}$$

である．式 (5) を Radon 変換を用いて解くと，Laplace 像空間における基本解 $\hat{U}_{IK}$ が得られる．

$$\hat{U}_{IK}(\mathbf{x},\mathbf{y},s) = \hat{U}^S_{IK}(\mathbf{x},\mathbf{y},s) + \hat{U}^R_{IK}(\mathbf{x},\mathbf{y},s) \tag{10}$$

ここに，$\hat{U}^S_{IK}$ は基本解の特異部分であり，次式で与えられる．

$$\hat{U}^S_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y},s) = \frac{1}{4\pi^2 r}\int_{|\mathbf{d}|=1}\sum_{\alpha=1}^{4}\Lambda^\alpha_{ik}(\mathbf{r},s,\mathbf{d})dL(\mathbf{d}) \tag{11}$$
$$\hat{U}^S_{i4}(\mathbf{x},\mathbf{y},s) = \hat{U}^S_{4k}(\mathbf{x},\mathbf{y},s) = 0 \tag{12}$$
$$\hat{U}^S_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y},s) = \frac{1}{4\pi^2 r}\int_{|\mathbf{d}|=1}\sum_{\alpha=1}^{4}\Lambda^\alpha_{44}(\mathbf{r},s,\mathbf{d})dL(\mathbf{d}) \tag{13}$$

Key Words: 異方性飽和多孔質弾性体，基本解，演算子積分法
〒 152-8552　東京都目黒区大岡山 2-12-1-W8-22　TEL 03-5734-3587　FAX 03-5734-3587

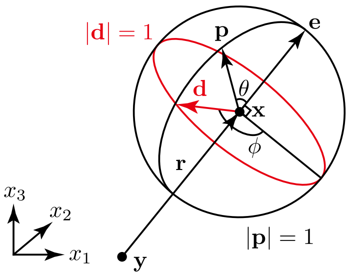

図 1 基本解に含まれる単位円周および単位球面に関する積分

また，$\hat{U}^R_{IK}$ は基本解の正則部分を表し，次式で与えられる．

$$\hat{U}^R_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y},s) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{|\mathbf{p}|=1}\sum_{\alpha=1}^{4}\Lambda^{\alpha}_{ik}(\mathbf{r},s,\mathbf{p})\Phi_\alpha(\mathbf{r},s,\mathbf{p})dA(\mathbf{d}) \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\hat{U}^R_{i4}(\mathbf{x},\mathbf{y},s) &= -\hat{U}^R_{i4}(\mathbf{x},\mathbf{y},s)\\ &= \frac{1}{8\pi^2}\int_{|\mathbf{p}|=1}\sum_{\alpha=1}^{4}\Lambda^{\alpha}_{i4}(\mathbf{r},s,\mathbf{p})\Psi_\alpha(\mathbf{r},s,\mathbf{p})dA(\mathbf{d})\end{aligned} \tag{15}$$

$$\hat{U}^R_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y},s) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{|\mathbf{p}|=1}\sum_{\alpha=1}^{4}\Lambda^{\alpha}_{44}(\mathbf{r},s,\mathbf{p})\Phi_\alpha(\mathbf{r},s,\mathbf{p})dA(\mathbf{d}) \tag{16}$$

である．なお，Λ^α_{IK} は文献 [2] に示すテンソルであり，Φ_α および Ψ_α は，次式で与えられる．

$$\Phi_\alpha(\mathbf{r},s,\mathbf{p}) = \mathrm{i}k_\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\alpha|\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}|} \tag{17}$$

$$\Psi_\alpha(\mathbf{r},s,\mathbf{p}) = \mathrm{sgn}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\Phi_\alpha(\mathbf{r},s,\mathbf{p}) \tag{18}$$

これらの基本解は，図 1 に示す単位円周 ($|\mathbf{d}| = 1$) および単位球面 ($|\mathbf{p}| = 1$) に関する積分を含むが，本研究ではこれらの積分を Gauss の数値積分公式を用いて処理した．

4. 基本解の妥当性の検証

前節で導出した基本解の妥当性を検証する．ここでは，等方性飽和多孔質弾性体の波動問題に関する基本解と比較することにより，基本解の妥当性を検証する．

計算精度の確認に用いる等方性飽和多孔質弾性体の材料パラメータは，以下の様に設定した．

$$\begin{aligned}&\beta = 0.19,\ \rho/\rho_f = 2.5,\\ &C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),\ \lambda = 1/3,\ \mu = 1,\\ &\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij},\ \alpha = 0.79,\ M = 2.1,\\ &m_{ik} = (\rho_f/\beta)\delta_{ik},\ r_{ik} = b\delta_{ik},\ b = 0\end{aligned}$$

ただし，b は散逸パラメータであり，本稿では $b = 0$ とし，散逸による影響をゼロと仮定している．

基本解の精度確認では，以下に示す式から媒質内部の変位 u_i および間隙流体の圧力 p の値を比較する．

$$u_i(\mathbf{x},t) = U_{iK}(\mathbf{x},\mathbf{y}^{\mathrm{src}},t) * s^{\mathrm{src}}_K(t) \tag{19}$$

$$p(\mathbf{x},t) = U_{4K}(\mathbf{x},\mathbf{y}^{\mathrm{src}},t) * s^{\mathrm{src}}_K(t) \tag{20}$$

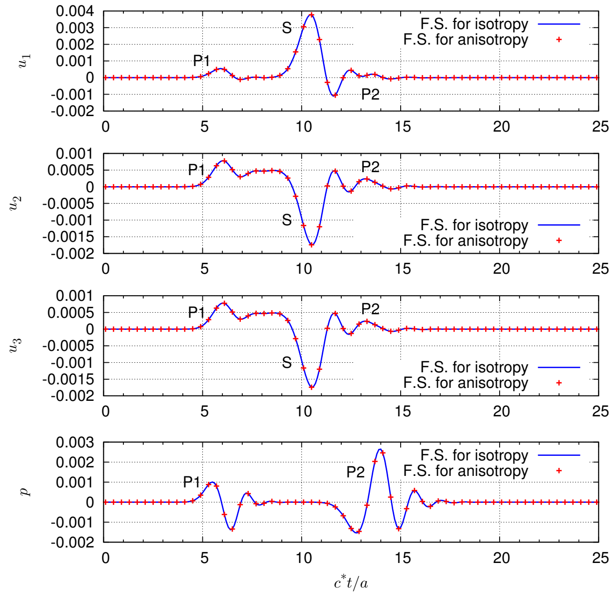

図 2 基本解を用いて計算される変位および圧力の時刻歴

ただし，

$$s^{\mathrm{src}}_K(t) = \frac{\delta_{1K}}{2}\left\{1-\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right\}\{H(t)-H(t-T)\} \tag{21}$$

であり，ここでは，$\mathbf{x} = \{6a,\ 6a,\ 6a\}^{\mathrm{T}}$ および $\mathbf{y}^{\mathrm{src}} = \{0,\ 0,\ 0\}^{\mathrm{T}}$ で与えた．ただし，$a\ (>0)$ は対象とする解析領域の代表長さを表す．式 (19) の計算には演算子積分法 [3] を用い，$T = 16\Delta t$，時間増分 Δt は $c^*\Delta t/a = 0.1$ で与えた．ただし $c^* = \sqrt{\mu/\rho}$ である．

両者の比較を図 2 に示す．同図において，青色の実線は等方性飽和多孔質弾性体に対する基本解，赤色の記号は本研究で導出された基本解によって算出された変位，圧力を表す．両者の値は概ね一致しており，この結果から，本研究で導出された基本解の妥当性が確認された．

5. おわりに

本稿では，異方性飽和多孔質弾性体の 3 次元波動問題に対する Laplace 像空間における基本解を導出し，等方性飽和多孔質弾性体の材料パラメータを用いて，基本解の妥当性を検討した．今後は，導出した基本解を用いた演算子積分時間領域境界要素法を開発し，入射波の散乱問題の解析を行う予定である．また，周波数領域に関する基本解も同様の手順で求め，周波数領域に関する境界要素法の開発も行う予定である．

参考文献

1) Biot, M.A.: Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media, *J. Appl. Phys.*, Vol.33, No.4, pp.1482–1498, 1962.
2) 古川陽, 斎藤隆泰, 廣瀬壮一: 演算子積分時間領域境界要素法による 2 次元異方性飽和多孔質弾性体中の波動解析, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol.69, No.2, pp.I_203–I_213, 2013.
3) Lubich, C.: Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math*, Vol.52, pp.129–145, 1988.