

拡張下負荷面モデルを用いた繰り返し 弾塑性有限要素解析のための時間域均質化法

新潟大学大学院自然科学研究科 学生員 大窪 和輝
新潟大学大学院自然科学研究科 正会員 紅露 一寛
新潟大学工学部建設学科 正会員 阿部 和久

1. はじめに

現在、鉄道軌道で広く用いられているバラスト道床は、列車の繰り返し走行による繰り返し荷重的作用によって沈下が発生・進展する。そのため、バラスト道床の沈下現象のメカニズムの解明や沈下量の定量予測は、軌道設計・保守上の重要課題である。

本研究室では、弾塑性モデルの一種である拡張下負荷面モデル¹⁾を用いてバラスト材の繰り返し変形挙動の表現を試みてきた²⁾。しかし、保守管理上問題となるバラスト道床沈下量は非常に多数回の荷重作用の繰り返しの後に生じることもあり、通常の解析では計算負荷の増大が懸念される。

そこで著者らは、拡張下負荷面モデルを用いた弾塑性材料の繰り返し変形解析において時間域均質化法を援用し、その妥当性について検証を行ってきた³⁾。しかし、文献³⁾では構成方程式における時間域均質化法の定式化とその有効性を示したに過ぎない。そこで本研究では、時間域均質化法の弾塑性有限要素解析法への実装や精度維持のための手法について検討する。

2. 拡張下負荷面モデル

本研究では、材料の繰り返し変形挙動を回転硬化を考慮した拡張下負荷面モデル¹⁾を用いて表す。微小変形を仮定し、応力速度 $\dot{\sigma}$ はひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ の加算分解および関連流動則を用いて、次式で与える。

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= E : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p), \quad \dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \bar{N} \quad (\dot{\lambda} > 0) \\ E_{ijkl} &= (K - \frac{2}{3}G)\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \\ K &= \frac{p + p_{num}}{\gamma}, \quad G = \frac{3(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)}K, \quad p = -\frac{\sigma_{kk}}{3}\end{aligned}\quad (1)$$

ここで、 $\bar{N}$ は下負荷面の外向き法線を規定するテンソルであり、 ν は Poisson 比、 p_{num} および γ は材料パラメータ、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。また $\dot{\lambda}$ は正值の比例係数であり、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= \frac{\bar{N}_{ij}E_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl}}{\Lambda + \bar{N}_{ij}E_{ijkl}\bar{N}_{kl}} = \Psi_{kl}\dot{\epsilon}_{kl} \\ \Lambda &= \bar{N}_{ij}\bar{a}_{ij} + \bar{N}_{ij}\bar{\sigma}_{ij}\left\{\frac{F'}{F}h - \frac{1}{RF}\frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \sigma_{ij}}b_{ij} + \frac{U}{R}\right\}\end{aligned}\quad (2)$$

なお、 $\bar{\sigma} = \sigma - (1 - R)s$ は下負荷面応力である。R は正規降伏面に対する下負荷面の相似比、s は相似中心応力、H

は等方硬化変数、 β は回転硬化変数であり、これらの硬化則は次式で与えられる。

$$\dot{H} = \dot{\lambda}h, \quad \dot{\beta} = \dot{\lambda}b, \quad \dot{s} = \dot{\lambda}z, \quad \dot{R} = \dot{\lambda}U \quad (3)$$

ここで、 $F, h, b, \bar{a}, U, z$ は文献¹⁾の定義に従い、塑性負荷・除荷状態は、試行応力増分ベクトルと下負荷面の外向き法線ベクトルとの内積に基づき判定する¹⁾。

3. 時間域均質化法

時間域均質化法³⁾とは、応答がマクロ時間スケールの変動成分とミクロの時間スケールの周期的な変動成分により構成される場合に、各スケールの変動成分を分離して考え、スケール間の連成効果を考慮しながら双方の応答を効率的に評価する方法である。

まず、スケール比 ζ により $\tau = t/\zeta$ ($\zeta \ll 1$) なる関係が成り立つマクロ時間変数 t とミクロ時間変数 τ を定義する。このとき、評価対象となる物理量 ϕ は t と τ の関数とみなせる。そこで式 (1)-(3) の物理量を ζ について漸近展開し、項別収束の条件を課した上で、最低次項 $\phi^{(0)}$ のみを考慮する。このとき $\phi^{(0)}$ が、 $\phi^{(0)}(x, t, \tau) = \check{\phi}(x, t) + \tilde{\phi}(x, t, \tau)$ のように分解可能であるとする。

その結果、 $O(\zeta^{-1})$ の諸式は、ミクロ時間スケールにおける構成則と発展則を次式で与える³⁾。

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{ij,\tau} &= E_{ijkl}^{(0)}(\tilde{\epsilon}_{kl,\tau} - \tilde{\epsilon}_{kl,\tau}^p), \quad \tilde{\epsilon}_{ij,\tau}^p = \tilde{\lambda}_{,\tau}\tilde{N}_{ij}^{(0)} \\ \tilde{H}_{,\tau} &= \tilde{\lambda}_{,\tau}h^{(0)}, \quad \tilde{\beta}_{ij,\tau} = \tilde{\lambda}_{,\tau}b_{ij}^{(0)}, \quad \tilde{s}_{ij,\tau} = \tilde{\lambda}_{,\tau}z_{ij}^{(0)} \\ \tilde{R}_{,\tau} &= \tilde{\lambda}_{,\tau}U^{(0)}, \quad \tilde{\lambda}_{,\tau} = \Psi_{kl}^{(0)}\tilde{\epsilon}_{kl,\tau}\end{aligned}\quad (4)$$

一方、マクロ時間スケールでは、 $O(\zeta^0)$ の諸式をミクロ時間の区間 $[0, \tau_0]$ で時間平均 $\langle \phi \rangle$ し、平均値の定理を用いることで次式のように導出できる³⁾。

$$\begin{aligned}\check{\sigma}_{ij,t} + \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle_{,t} &= \langle E_{ijkl}^{(0)} \rangle (\check{\epsilon}_{kl,t} - \check{\epsilon}_{kl,t}^p) \\ &\quad + E_{ijkl}^{(0)}(\tau_1)\langle \tilde{\epsilon}_{kl} \rangle_{,t} - E_{ijkl}^{(0)}(\tau_2)\langle \tilde{\epsilon}_{kl}^p \rangle_{,t} \\ \check{\epsilon}_{ij,t}^p + \langle \tilde{\epsilon}_{ij}^p \rangle_{,t} &= \langle \tilde{N}_{ij}^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \rangle \check{\epsilon}_{kl,t} + \tilde{N}_{ij}^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)}(\tau_1)\langle \tilde{\epsilon}_{kl} \rangle_{,t} \\ \check{H}_t + \langle \tilde{H} \rangle_{,t} &= \langle h^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \rangle \check{\epsilon}_{kl,t} + h^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)}(\tau_1)\langle \tilde{\epsilon}_{kl} \rangle_{,t} \\ \check{\beta}_{ij,t} + \langle \tilde{\beta}_{ij} \rangle_{,t} &= \langle b_{ij}^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \rangle \check{\epsilon}_{kl,t} + b_{ij}^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)}(\tau_1)\langle \tilde{\epsilon}_{kl} \rangle_{,t} \\ \check{s}_{ij,t} + \langle \tilde{s}_{ij} \rangle_{,t} &= \langle z_{ij}^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \rangle \check{\epsilon}_{kl,t} + z_{ij}^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)}(\tau_1)\langle \tilde{\epsilon}_{kl} \rangle_{,t} \\ \check{R}_t + \langle \tilde{R} \rangle_{,t} &= \langle U^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \rangle \check{\epsilon}_{kl,t} + U^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)}(\tau_1)\langle \tilde{\epsilon}_{kl} \rangle_{,t}\end{aligned}\quad (5)$$

なお、 $\tau_1 = \langle \tau \tilde{\epsilon}_{ij} \rangle / \langle \tilde{\epsilon}_{ij} \rangle$, $\tau_2 = \langle \tau \tilde{\epsilon}_{ij}^p \rangle / \langle \tilde{\epsilon}_{ij}^p \rangle$ である。

Key Words: バラスト道床, 拡張下負荷面モデル, 時間域均質化法, 有限要素解析

連絡先: 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地 TEL 025 (262) 7274 FAX 025 (262) 7274

4. つりあい問題の定式化

本研究では準静的つりあい問題を考え、時間域均質化法を導入した際のミクロ時間・マクロ時間それぞれの時間スケール下でつりあい問題に対応する仮想仕事式を導く。変位 u_i 、物体力 b_i 、表面力 p_i を ζ について漸近展開し、最低次項がマクロ時間変数にのみ依存する変動成分とそれ以外の変動成分に分離可能であるとする、釣り合い式と境界条件は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ji,j} + \tilde{\sigma}_{ji,j} + \tilde{b}_i + \tilde{b}_i &= 0 \text{ in } \Omega \\ \tilde{u}_i &= \tilde{U}_i \text{ and } \tilde{u}_i = \tilde{U}_i \text{ on } \Gamma_u \\ \tilde{p}_i &= \tilde{\sigma}_{ji} n_j = \tilde{P}_i \text{ and } \tilde{p}_i = \tilde{\sigma}_{ji} n_j = \tilde{P}_i \text{ on } \Gamma_p \end{aligned} \quad (6)$$

ここで n_j は境界上での単位外向き法線ベクトルであり、 Ω は領域、 Γ_u は変位規定部分境界、 Γ_p は表面力規定部分境界を表す。また、 $\tilde{U}_i$ 、 $\tilde{U}_i$ 、 $\tilde{P}_i$ 、 $\tilde{P}_i$ はそれぞれ変位 $\tilde{u}_i$ 、 $\tilde{u}_i$ 、表面力 $\tilde{p}_i$ 、 $\tilde{p}_i$ の既知量であり、物体力 $\tilde{b}_i$ 、 $\tilde{b}_i$ はどちらも既知量とする。

式 (6) に関し、各スケールでの仮想仕事式は、可容変位を $\tilde{u}_i + \delta\tilde{u}_i$ 、 $\tilde{u}_i + \delta\tilde{u}_i$ に選ぶことにより、次式で与えられる。

- ミクロ時間スケール

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij} \delta\tilde{\epsilon}_{ij} d\Omega &= \int_{\Gamma_p} (\tilde{p}_i + \tilde{p}_i) \delta\tilde{u}_i d\Gamma \\ + \int_{\Omega} (\tilde{b}_i + \tilde{b}_i) \delta\tilde{u}_i d\Omega &- \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij} \delta\tilde{\epsilon}_{ij} d\Omega \end{aligned} \quad (7)$$

- マクロ時間スケール

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij} \delta\tilde{\epsilon}_{ij} d\Omega &= \int_{\Gamma_p} (\tilde{p}_i + \langle\tilde{p}_i\rangle) \delta\tilde{u}_i d\Gamma \\ + \int_{\Omega} (\tilde{b}_i + \langle\tilde{b}_i\rangle) \delta\tilde{u}_i d\Omega &- \int_{\Omega} \langle\tilde{\sigma}_{ij}\rangle \delta\tilde{\epsilon}_{ij} d\Omega \end{aligned} \quad (8)$$

なお、 $\delta\epsilon_{ij}$ は仮想ひずみであり、 $\delta\tilde{\epsilon}_{ij} = (\delta\tilde{u}_{i,j} + \delta\tilde{u}_{j,i})/2$ 、 $\delta\tilde{\epsilon}_{ij} = (\delta\tilde{u}_{i,j} + \delta\tilde{u}_{j,i})/2$ である。

5. 定式化の妥当性の検証

本手法の妥当性を検証するため、繰り返し三軸試験を再現する弾塑性有限要素解析を行い、従来法と本手法とを比較した。応力条件は、拘束圧を $\sigma = -19.6 \text{ I(kPa)}$ (引張を正) で一定とし、軸方向のみ -98.0 (kPa) まで増加させ、再び軸差応力 0 の状態まで戻す載荷・除荷サイクルを繰り返す。また、本手法では n_0 サイクルまで通常の弾塑性有限要素解析を行い、それ以降で時間域均質化法を適用する。適用後は、ミクロ時間解析を 1 サイクル行い、その結果から Δn サイクル後のマクロ時間応答を評価し、再びミクロ時間解析を行う過程を繰り返す。そのため、 Δn を大きな値に設定することで計算負荷の削減につながる。

表 1 材料定数

$\nu = 0.4, \gamma = 4 \times 10^{-5}, \phi = 50^\circ$
$\rho = 1 \times 10^{-3}, \mu = 5, \phi_d = 10^\circ$
$b_r = 90, \phi_b = 60^\circ$
$u_1 = 6, m_1 = 3$
$c_1 = 20, c_2 = 3, c_3 = 2$
$F_0 = 200, p_{num} = 0.1 \text{ (kPa)}$

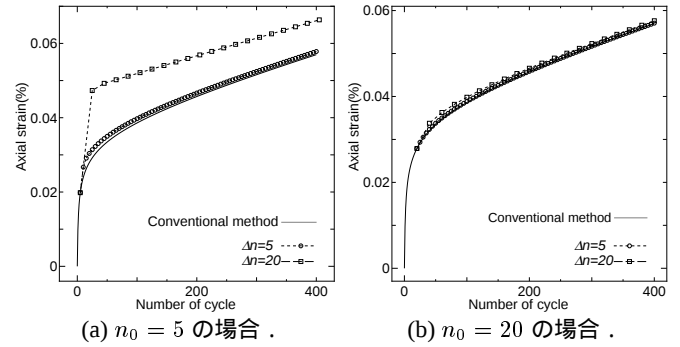


図 1 各サイクルでの残留軸ひずみにおける $n_0, \Delta n$ の影響

なお、今回の解析では定式化の妥当性を検証することが主たる目的であり、実現象を再現するための材料定数ではなく、ある程度のサイクル数以降ではサイクル数に対して残留ひずみが概ね線形に増加するよう調整した材料定数を用いた (表 1)。

図 1 は、残留ひずみと載荷・除荷繰り返しサイクル数の関係を通常の弾塑性有限要素解析と本手法の解析結果を比較したものである。解析結果より、サイクル間で残留ひずみの進展速度に大きな変化がない段階で時間域均質化法を導入した場合、通常の解析結果に近い応答が得られている。このように、サイクル数に対して概ね線形に残留ひずみが進展するときは、 Δn の値を大きく設定しても誤差が生じにくいことがわかる。

しかし、今回の解析対象は領域内で応力・ひずみ分布が一樣となっており、そのときの妥当性の検証を行ったに過ぎない。そこで今後は、領域内で一樣でない分布を示す場合での妥当性の検証を行うとともに、対象の状態変化に合わせた Δn の自動設定法の開発や多段法による積分アルゴリズムを取り入れるなどで、解析精度の向上を図ることとしたい。

参考文献

- 橋口公一, 上野正実, 陳 忠平: 下負荷面および回転効果の概念に基づく土の弾塑性構成式, 土木学会論文集 No.547/III-36, pp.127-144, 1996.
- 福津佑太, 紅露一寛, 阿部和久: 回転硬化を考慮した下負荷面モデルによる有道床軌道の繰り返し変形解析の試み, 土木学会第 63 回年次学術講演会講演概要集 2, 135-136 (2008).
- 大塚和輝, 紅露一寛, 阿部和久: 時間域均質化法を援用した拡張下負荷面モデルを用いた繰り返し弾塑性解析, 計算数理工学論文集, Vol. 13, pp.67-72, 2013