安定化有限要素法を用いた自由表面流れ解析における流体力の精度検証

中央大学大学院	学生員	太田	真貴子
中央大学大学院	学生員	不室	太希
中央大学	正会員	樫山	和男

1. はじめに

わが国の沿岸部では,今後も津波による甚大な被害が予 想されるため,浸水被害に加えて構造物の損傷についても 検討する必要がある.そして,数値解析手法である有限要 素法は要素形状が任意であるので,構造物の幾何形状が複 雑である場合でも解析が可能である.

自由表面流れを表現する手法は,界面追跡法と界面捕捉 法に分類される.界面追跡法は自由表面近傍のメッシュに 歪みが生じ計算が破綻しやすいが,界面捕捉法は計算が破 綻しにくく安定して解析を行うことができる.

そこで,本研究では界面捕捉法に着目し,VOF法¹⁾を用 いた安定化有限要素法²⁾による自由表面流れの解析手法を とりあげ,その精度検証を行った.具体的には,数値解析 例として構造物を有する3次元ダムブレイク問題を取り上 げ,構造物に作用する流体力を計算し,計算結果と実験結 果の比較を行った.

2. 数值解析手法

(1) 密度・粘性係数の計算

VOF 法は,自由表面位置を VOF 関数と呼ばれるスカ ラー関数 ϕ により表現する手法である. VOF 関数 ϕ は各 節点において,気体であれば 0.0,液体であれば 1.0,自由 表面上であれば 0.5 の値をとる.気体,液体の密度と粘性 係数は VOF 関数 ϕ を用いて以下の式のように決定できる.

$$\rho = \rho_l \phi + \rho_g \left(1 - \phi \right) \tag{1}$$

$$\mu = \mu_l \phi + \mu_g \left(1 - \phi \right) \tag{2}$$

ここで, ρ , μ は各要素における密度と粘性係数である.また, ρ_l , ρ_g , μ_l , μ_g はそれぞれ液体の密度,気体の密度,液体の粘性係数,気体の粘性係数である.

(2) 流速・圧力の計算

非圧縮性粘性流体の支配方程式は,以下に示す Navier-Stokes の運動方程式(3)と連続式(4)で表される.

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - f_i \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} -\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \qquad (3) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \qquad (4)$$

ここで, Ω は境界 Γ で囲まれた解析領域, u_i ,p, f_i はそれ ぞれ流速,圧力,物体力である.密度と粘性係数は,VOF 関数を用いた式(1)および(2)から計算した値を用いる.

Dirichlet 境界条件および Neumann 境界条件は, それぞ

れ式(5),(6)のように示す.

$$u_i = g_i \quad \text{on} \quad \Gamma_{\rm g} \quad (5)$$

$$\left(-p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right)n_j = h_i \quad \text{on} \quad \Gamma_{\rm h} \quad (6)$$

 Γ_g , Γ_h はそれぞれ Dirichlet 境界条件および Neumann 境 界条件が与えられる境界を表し, g_i , h_i はそれぞれ境界上 での流速とトラクション, δ_{ij} は Kronecker のデルタ, n_j は外向き単位法線ベクトルを表す.

支配方程式(3),(4) に対し,空間方向の離散化には SUPG/PSPG法³⁾に基づく安定化有限要素法を適用し,時 間方向の離散化には陰解法である Crank-Nicolson 法を適 用する.

(3) 自由表面位置の計算

VOF 関数は,以下に示す移流方程式(7)と初期条件(8) により支配される.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{7}$$

$$\phi = \phi_0 \qquad \text{at} \quad \mathbf{t} = 0 \tag{8}$$

ここで, u_i , ϕ_0 はそれぞれ流速,VOF 関数の初期値である. u_i はNavier-Stokesの運動方程式および連続式から計算した値を用いる.

支配方程式 (7) に対し, 空間方向の離散化には SUPG 法 に基づく安定化有限要素法を適用し,時間方向の離散化に は陰解法である Crank-Nicolson 法を適用する.

(4) 流体力の計算

支配方程式(3),(4)に対し,重み付き残差法を適用し, 圧力項と粘性項に対して部分積分を施すことにより,以下 の弱形式が得られる.

$$\int_{\Omega^{0}} w_{i}^{h} \rho \left(\frac{\partial u_{i}^{h}}{\partial t} + u_{j}^{h} \frac{\partial u_{i}^{h}}{\partial x_{j}} - f_{i} \right) d\Omega - \int_{\Omega^{0}} \frac{\partial w_{i}^{h}}{\partial x_{i}} p^{h} d\Omega + \int_{\Omega^{0}} q^{h} \frac{\partial u_{i}^{h}}{\partial x_{i}} d\Omega + \int_{\Omega^{0}} \frac{\partial w_{i}^{h}}{\partial x_{j}} \mu \left(\frac{\partial u_{i}^{h}}{\partial x_{j}} + \frac{\partial u_{j}^{h}}{\partial x_{i}} \right) d\Omega = \int_{\Gamma_{\text{in}}} w_{i}^{h} \left\{ -p^{h} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_{i}^{h}}{\partial x_{j}} + \frac{\partial u_{j}^{h}}{\partial x_{i}} \right) \right\} n_{j} d\Gamma$$
(9)



図-1 解析領域と構造物周りのメッシュ拡大図

KeyWords: 安定化有限要素法,流体力, VOF法, SUPG/PSPG法, Navier-Stokes 方程式 連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL. 03-3817-1815 Email: otamkk@civil.chuo-u.ac.jp





ここで, $\Omega^0 \ge \Gamma_{in}$ は, 図 - 1に示すように,構造物周りの 領域と境界を表す. Γ_{in} 上の重み係数をゼロとしない場合を 考えると,右辺の積分項そのものが構造物に働く流体力と なる.計算された流速と圧力を,式(9)に代入することに より,構造物に働く流体力が求められる.

3. 数值解析例

数値解析例として,構造物を有する3次元ダムブレイク 問題を取り上げ,構造物に作用する流体力を計算し,計算結 果と実験結果⁴⁾の比較を行う.解析モデルを図-2に示す. 解析メッシュは,表-1に示す2種類の四面体メッシュ を用い,計算結果の比較を行う.メッシュBにおける解析 メッシュ図を図-3に示す.

(1) 解析条件

境界条件として,壁面に Slip 条件を与える.微小時間増 分量は, $\Delta t = 0.001 \text{ s}$ とする.液体,気体の密度はそれぞれ 1000 kg/m³,1.0 kg/m³,粘性係数は $1.00 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $1.00 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ とする.

(2) 解析結果

図 - 4 に構造物に働く x 方向の流体力の時刻歴を示す. 実験値と計算値を比較した結果,時刻歴に差異が生じているが,最大値は概ね一致した.t = 0.31 sのとき,流体力の計算値は最大となった.また,メッシュの違いにおいて,流体力の時刻歴に差異が生じているが,最大値は概ね一致した.

次に,図-5にメッシュBにおける t = 0.31 s での自由 表面形状と圧力分布の計算結果を示す.水流先端は構造物 に到達し,構造物周りの圧力が大きい様子が確認できた.

表-1 解析メッシュ

メッシュ	節点数	要素数	最小メッシュ幅 [m]
А	482,349	2,742,076	1.87×10^{-3}
В	1,224,746	7,029,070	1.27×10^{-3}



図-4 構造物に働く x 方向の流体力の時刻歴



図-5 t = 0.31 s における自由表面形状と圧力分布

4. おわりに

本研究では, VOF 法を用いた安定化有限要素法による自 由表面流れの解析手法に着目し,構造物に作用する流体力 を計算した結果,以下の結論を得た.

- 計算結果と実験結果の比較において,流体力の時刻
 歴に差異が生じているが,最大値は概ね一致し実験
 結果に近い結果となった.
- メッシュの違いにおいて、流体力の計算結果に差異が
 生じているが、最大値は概ね一致する結果となった。

今後は,乱流モデルの導入,流体 構造連成解析手法に ついて検討する予定である.

参考文献

- Hirt, C.W.& Nichols, B.D.: Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries, *Journal of Computational Physics*, 39, (1981), 201-225
- 2) 桜庭雅明, 弘崎聡, 樫山和男: 自由表面流れ解析のための CIVA/VOF 法に基づく高精度界面捕捉法の構築, 応用力学 論文集, 6, (2003), 215-222
- Tezduyar, T.E.: Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, Advances in Applied Mechanics, 28, (1992), 1-44
- 4) Gomez-Gesteira, M. & Dalrymple, R.A. : Using a threedimensional smoothed particle hydrodynamics method for wave impact on a tall structure, *Journal of Waterway*, *Port, Coastal and Ocean Engineering*, 130, (2004), 63-69