

浸透流解析における流跡線描画のための後処理

清水建設技術研究所 正 ○櫻井英行・正 白石知成
横浜国立大学 正 山田貴博・非 山本達也

1. はじめに

浸透流問題における一般的なFEMでは、節点の速度ポテンシャルを未知数として求解する。流速ベクトルは、構造解析における歪と同様、後処理として要素ごとに速度ポテンシャルの形状関数の微分により算出される。また、フラックスに関するノイマン境界条件は、自然境界条件となるが、算出された流速ベクトルが、フラックス・ゼロの不透水条件は満足するのは特別な場合に限られる。したがって、粒子を流速ベクトルに乗せて追跡する流跡線計算では、不透水境界にも関わらず、粒子がモデル外に飛び出し、計算が破たんするといった問題が生じる。

一方、近年、速度ポテンシャルと流速ベクトルを独立に補間するRaviart-Thomas混合補間を用いたハイブリッドFEM (RT-HM)¹⁾による浸透流解析が注目されてきた。RT-HMにおける流速ベクトルは、要素面上のフラックスを自由度として補間されるため、不透水条件を満足することができる。しかし、速度ポテンシャルは要素の面と中心でゼロ次補間(一定値)されるため、次のような不都合が生じる。

- ・一般的なプリ・ポスト・プロセッサがそのまま使えない
- ・地形面で圧力を与える場合、起伏の影響が過小評価される
- ・飽和不飽和解析では浸出面処理の収束性が悪化する

これに対し、著者らは一般的なFEM解析の結果から要素の面の速度ポテンシャルを節点の平均値として求め、Raviart-Thomas混合補間を利用して要素内の流速場を求める簡易な方法について、妥当性確認のための数値実験を行った。本稿では、その結果を報告する。

2. Raviart-Thomas 補間によるハイブリッド FEM²⁾

RT 補間における流速ベクトルの近似関数 $\bar{\mathbf{u}}^{RT}$ は、要素座標系 ξ によって次のように表される。

$$\bar{\mathbf{u}}^{RT}(\xi) = [\bar{\mathbf{N}}^{RT}(\xi)]^T \{q^{Face}\} \equiv \sum_j^{N^{Face}} \bar{\mathbf{N}}_j^{RT}(\xi) q_j^{Face} \quad (1)$$

ここに $\{q^{Face}\}$ は要素の面における流量、 N^{Face} は要素の面の数である。 $[\bar{\mathbf{N}}^{RT}]$ は形状関数であり、六面体の場合、

$$[\bar{\mathbf{N}}^{RT}(\xi)]^T = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1+\xi & 0 & -1+\xi \\ 0 & 0 & -1+\psi & 0 & 1+\psi & 0 \\ -1+\zeta & 1+\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

流速ベクトルの要素座標系から物理座標系への写像は、次のピオラ変換によって行われる。

$$\mathbf{u}^{RT}(\mathbf{x}(\xi)) = [J(\xi)]^{-1} [J(\xi)] \bar{\mathbf{u}}^{RT}(\xi) \quad (3)$$

ここに、 $[J]$ は、要素座標系から物理座標系への写像関数から作られる Jacobian 行列である。

ハイブリッド型変分原理を用いて定式化すると最終的に次の要素方程式を得る。

$$\{q^{Face}\} = [K] \{\lambda^{Face}\} \quad (4)$$

ここに $\{\lambda^{Face}\}$ は、要素面上の速度ポテンシャルに対応するラグランジュ乗数であり、面上で一定値とする。式(4)から全体系を組み上げ、 $\{\lambda^{Face}\}$ を求解する。

3. 数値計算例

図-1に示す二次元問題において、六面体要素を用いて、次の四つの方法による流速ベクトルの比較を行った。

(M1) 一般的な FEM

一般的なFEMでは速度ポテンシャルの近似関数の微分により流速ベクトルを求める。ここでは、 $\mathbf{u}^{FEM}$ と記す。

$$\mathbf{u}^{FEM} = \nabla \{N^{FEM}(\mathbf{x})\}^T \{\phi^{Node}\} \quad (5)$$

ここに $\{N^{FEM}\}$ は速度ポテンシャルの形状関数、 $\{\phi^{Node}\}$ は速度ポテンシャルの節点値である。

(M2) RT-HM

RT-HM の流速ベクトル $\mathbf{u}^{RT-HM}$ は次ように求める。

- 1) 求解された $\{\lambda^{Face}\}$ と式(4)により $\{q^{Face}\}$ を計算する。
- 2) 式(1)と式(3)から流速ベクトル $\mathbf{u}^{RT-HM}$ を計算する。

(M3) FEM の $\{\phi^{Node}\}$ から RT 補間

これは、一般的な FEM で求められた $\{\phi^{Node}\}$ から要素面上の速度ポテンシャルを単純平均で計算し、RT 補間を適用して、流速ベクトルを求める方法である。 $\mathbf{u}^{FE \rightarrow RT}$ と記す。

- 1) 各要素面において、面の構成節点の $\{\phi^{Node}\}$ を平均して $\{\lambda^{Face}\}$ とする。
- 2) 式(4)から $\{q^{Face}\}$ を計算する。
- 3) 式(1)と式(3)から流速ベクトル $\mathbf{u}^{FE \rightarrow RT}$ を求める。

(M4) FEM の $\{\phi^{Node}\}$ から修正 RT 補間

これは、上記(3)と同様であるが、式(4)で $\{q^{Face}\}$ を計算する際に、フラックスの境界条件を $\{q^{Face}\}$ に代入する方法である。 $\mathbf{u}^{FE \rightarrow RTm}$ と記す。

- 1) 上記(3)の 1)と同じ。
- 2) 式(4)から $\{q^{Face}\}$ を求める。その際、フラックス既知境界上の面 j は q_j^{Face} を既知、 λ_j^{Face} を未知とする。
- 3) 式(1)と式(3)から流速ベクトル $\mathbf{u}^{FE \rightarrow RTm}$ を求める。

キーワード: Raviart-Thomas, 浸透流解析, 流速ベクトル, 流跡線

連絡先: 〒135-8530 東京都江東区越中島 3-4-17 清水建設(株)技術研究所 社会基盤技術センター TEL(03)3820-8779

図-2 は、四つの方法で求めた流速ベクトルである。流速は各要素の節点位置で求めているが、矢線が重なるのを避けるため、要素の内側に少し始点をずらして描いた。

M1 の FEM による流速ベクトルは、隣接要素間で流量が不連続になっており、領域境界を横切るような流速成分も見て取れる。一方、M2 の RT-HM による流速ベクトルは隣接要素間で流量は連続であり、領域境界に沿う流れとなっている。これらはデジタル値でも確認した。M3 の FEM の結果から RT 補間により求めた流速ベクトルでは、領域境界に沿う流れは得られないことが確認できた。ただし、補間式が違うので M1 の FEM の流速ベクトルとは異なっている。M4 のフラックスの境界条件を代入して、FEM の結果から RT 補間により求めると、当然ではあるが、領域境界に沿う流れが得られており、全体的な流速場の乱れも少ないことが分かる。ただし、要素間で流量は連続にはなっていない。

4. おわりに

一般的な FEM による浸透流解析で得られる流速ベクトルでは流跡線の計算に問題が生じる。これを解決するための一手法として RT 補間で流速ベクトルを求めることの妥当性を検討した。良好な見通しは得られたが、フラックス境界

の流量を強制的に操作することによる流量収支への影響のほかに RT 補間の歪んだ要素での性能低下などの問題²⁾があり、今後も有用性の検討を継続していく予定である。

参考文献

- 1) Younes, A., Ackerer, P. and Delay, F.: Mixed finite elements for solving 2-D diffusion-type equations, *Reviews of Geophysics*, Vol. 48, RG1004, 2010.
- 2) 櫻井, 郷家, 白石, 菱谷, 山浦, 鹿島: Raviart-Thomas 補間を用いた有限要素の三次元浸透流問題における基本性能, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol.69, No.1, pp.30-40, 2013.

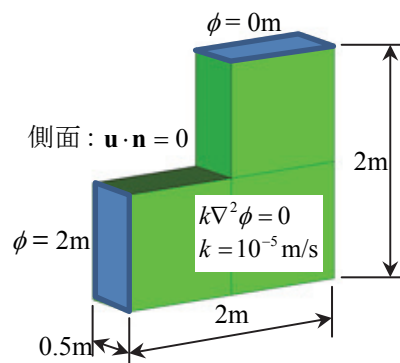


図-1 解析モデル

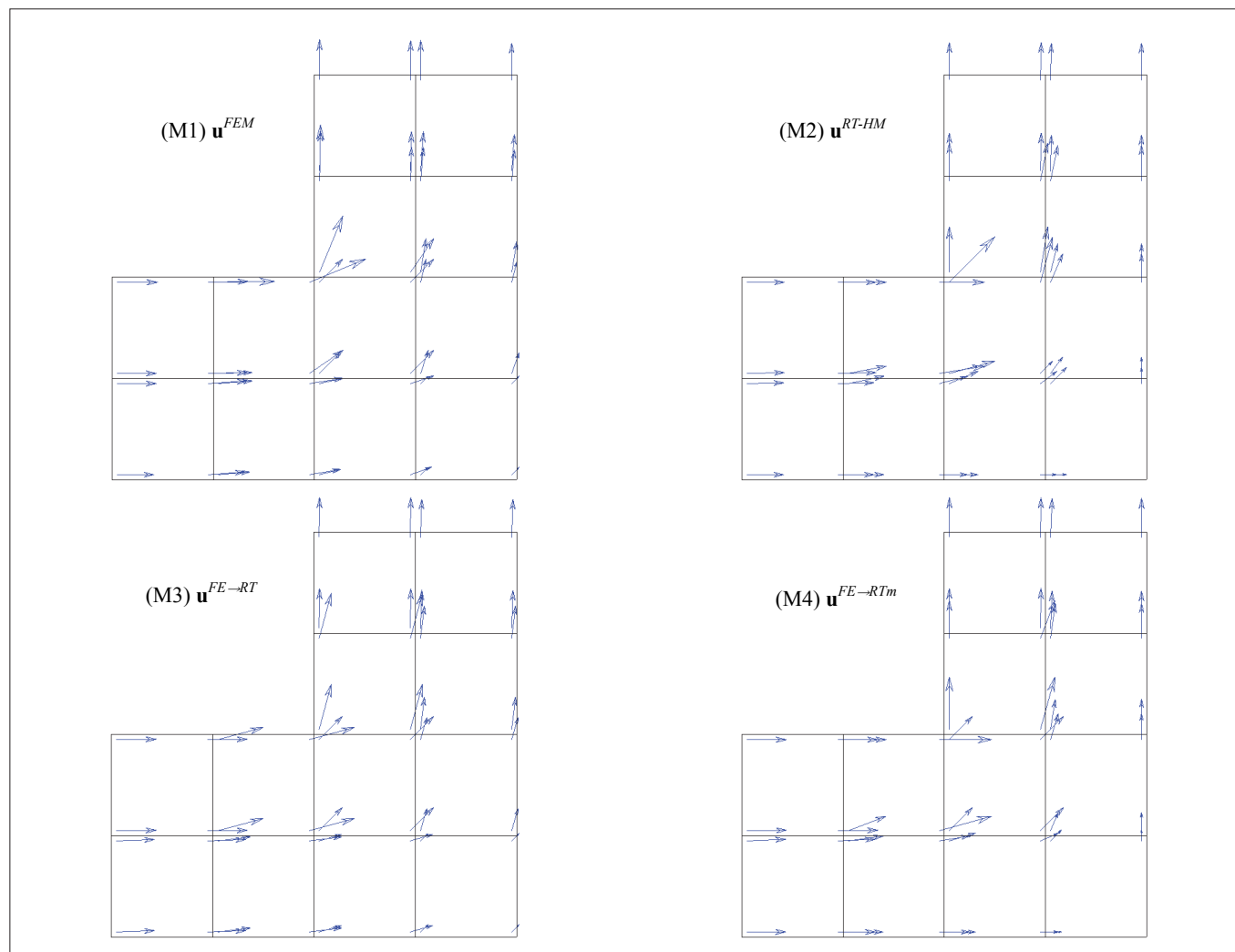


図-2 四つの方法で求めた流速ベクトル比較