

一般化有限要素法による自由表面流れ解析に関する研究

茨城大学 学生会員 ○阿部 俊逸 学生会員 渡邊 義仁
茨城大学 学生会員 遠藤 重紀 正会員 車谷 麻緒

1. はじめに

従来, 自由表面流れを把握するためには, 水理模型実験¹⁾に頼ることが多かったが, 近年コンピュータの性能向上と数値解析手法の発展により, 自由表面流れの数値シミュレーション²⁾が有効に用いられている. 自由表面流れ解析では, 気液二相流で解析を行うのが一般的であるが, 解析時間の大半が気体に費やされている.

本研究では, 気液二相流, および一般化有限要素法を用いて液体のみを計算する単相流で自由表面流れ解析を行い, 流体力の評価および解析の効率化を行った.

1. 自由表面流れの数値解析手法

1.1 自由表面位置の決定方法

自由表面の位置を決定する方法として, 界面捕捉法の1つであるVOF法を用いた. VOF法は, 自由表面の位置をVOF関数と呼ばれるスカラー関数により表現する. VOF関数 ϕ は, 液体であれば1, 気体であれば0, 自由表面上であれば0.5となる.

1.2 支配方程式

Euler記述された非圧縮性粘性流体の支配方程式は, Navier-Stokes方程式と連続式で表される.

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{b} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

ここで, ρ は密度, $\mathbf{u}$ は速度ベクトル, $\mathbf{b}$ は物体力ベクトル, $\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソルである. また, 応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ は以下の式で表される.

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mu [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (3)$$

ここで, p は圧力, $\mathbf{I}$ は2階の単位テンソル, μ は粘性係数である.

一方, VOF関数 ϕ は移流方程式(4)を解くことによって求められる.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (4)$$

ここで, 各節点における気体, 液体の密度と粘性係数は次式のように求められる.

$$\rho = \rho_{\text{liq}}\phi + \rho_{\text{gas}}(1-\phi), \quad \mu = \mu_{\text{liq}}\phi + \mu_{\text{gas}}(1-\phi) \quad (5)$$

ここで, $\rho_{\text{liq}}, \rho_{\text{gas}}, \mu_{\text{liq}}, \mu_{\text{gas}}$ は, それぞれ液体, 気体の密度および粘性係数であり, 単相流の場合は一般化FEMを用い, 式(5)それぞれ第1項のみ計算を行う.

キーワード 流体力, 界面捕捉法, VOF法, 単相流, 一般化有限要素法

連絡先 〒316-8511 茨城県日立市中成沢町 4-12-1 茨城大学工学部 TEL. 0294-38-5004 FAX. 0294-38-5268

1.3 空間方向と時間方向の離散化

非圧縮性粘性流体の支配方程式(1), (2)に対する離散化は直接法に基づき, 空間方向の離散化はSUPG/PSPG(Streamline Upwind Petrov Galerkin/Pressure stabilizing Petrov Galerkin)法に基づく安定化有限要素法を適用し, P1/P1(流速・圧力1次)要素を用いて離散化を行った. 以下に弱形式を示す.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{b} \right) d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{w} d\Omega \\ & + \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{u} : (\nabla \mathbf{w})^T + \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega} \left\{ \tau_{\text{supg}} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} + \tau_{\text{pspg}} \frac{1}{\rho} \nabla q \right\} \\ & \cdot \left\{ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{b} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right\} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega} \tau_{\text{cont}} \nabla \cdot \mathbf{w} \rho \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Gamma_t} \mathbf{w} \cdot \mathbf{t} d\Gamma \end{aligned} \quad (6)$$

ここで, $\mathbf{w}, q$ はそれぞれ流速, 圧力の重み関数, $\tau_{\text{supg}}, \tau_{\text{pspg}}, \tau_{\text{cont}}$ は安定化パラメータ, Ω は解析対象領域である.

また, 移流方程式(4)に対する空間方向の離散化には, SUPG法に基づく安定化有限要素法を適用し, P1/P1(流速・圧力1次)要素を用いて空間方向の離散化を行った. 以下に弱形式を示す.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \psi \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi \right) d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega} \tau_{\phi} \mathbf{u} \cdot \nabla \psi \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi \right) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega} \tau_{\text{lsic}} \nabla \psi \cdot \nabla \phi d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

ここで, ψ はVOF関数の重み関数, $\tau_{\phi}, \tau_{\text{lsic}}$ は安定化パラメータである.

一方, 時間方向の離散化については, 中心差分法であるクランク・ニコルソン法を適用した. また, 流速 $\mathbf{u}$ は, 以下の式で表される2次精度Adams-Bashforth法により陽的に近似する.

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{2}(3\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \quad (8)$$

ここで n は時間ステップ数である. 連立1次方程式の解法にはGPBi-CG法を用いた.

