単一トンネルにおける覆工コンクリートの劣化予測

東京都市大学　正会員　○丸山　收・須藤敦史
関西大学　非会員　兼清泰明
(独)土木研究所寒地土木研究所　正会員　佐藤京・西弘明

1. はじめに

本研究では北海道内の山岳トンネルを対象として，供用期間中のトンネル点検データより得られた情報をもとに覆工コンクリートの劣化過程モデルを構築して，劣化予測を行うことを目的としている．劣化予測モデルとしては，複合 Poisson 過程を外乱とする確率微分方程式を定式化して，実観測値をもとにモデルのパラメータを同定し，予測式の精度を検証する．

2. 劣化過程モデルの定式化[1, 2)]

本研究では，複合 Poisson 過程を不規則な損傷度成長の駆動雑音として，劣化度 $X(t)$ の時間成長を記述する確率微分方程式を用いる．複合 Poisson 過程 $C(t)$ は，$N(t)$ を強度 λ の Poisson 過程，$\{Y_k\}_{k=1,2,\cdots}$ はお互いに独立で，同一分布に従うものとして，次式で与えられる．

$$C(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \tag{1}$$

複合 Poisson 過程において，$E[Y_k] = q_1$ とすると平均は次式で与えられる．

$$E[C(t)] = \lambda q_1 t \tag{2}$$

平均値が 0 である駆動雑音を $Z(t) = C(t) - \lambda q_1 t$ として，次式のように劣化度 $X(t)$ の時間成長を記述する確率微分方程式が得られる．

$$dX(t) = \{\mu_0(t) - \lambda q_1\}X(t)dt + X(t^-)dC(t) \tag{3}$$

ここで，$\mu_0(t)$ は，劣化度 $X(t)$ の平均的時間成長係数である．

次に，$\mu_0(t) = \mu_0$ とすると，式(3)の解は，次式となる．

$$X(t) = X(0)\exp\{(\mu_0 - \lambda q_1)t\}\prod_{k=1}^{N(t)}(1 + Y_k) \tag{4}$$

また，$X(t)$ の確率密度関数はたたみ込み積分を含んだ関数形となるが，平均値と分散値は次式となる．

$$E[X(t)] = X(0)\exp\{\mu_0 t\} \tag{5}$$

$$Var[X(t)] = X(0)^2\exp\{2\mu_0 t\}(\exp\{\lambda q_2 t\} - 1) \tag{6}$$

$q_2 = E[{Y_k}^2]$ はジャンプの 2 次モーメントである．
ここで，Y_k の確率密度関数 $f_Y(y)$ が，平均値 ν の指数分布に従うものとする．

$$f_Y(y) = (1/\nu)\exp(-y/\nu) \tag{7}$$

この仮定の下で，$q_2 = E[{Y_k}^2] = 2\nu^2$ となる．

3. 最尤法によるパラメータ同定

式(3)のパラメータを点検データから推定するために，最尤法を用いる．まず，ボラティリティ σ_0 を正定数，$B(t), (0 \le t < \infty)$ は，$B(0) = 0$，任意の $0 \le s < t < \infty$ において，$B(t) - B(s)$ が，$N(0, t - s)$ である独立増分な標準 Wiener 過程とすると，次式の算術ブラウン運動モデルが得られる．

$$dX(t) = \mu_0(t)dt + \sigma_0 dB(t) \tag{8}$$

一方，幾何ブラウン運動モデルは，次式で与えられる．

$$dX(t) = \mu_0 X(t)dt + \sigma_0 X(t)dB(t) \tag{9}$$

式(9)の解過程は，対数正規分布であり，式(3)と同様な挙動を示すこととなる．一方，幾何ブラウン運動 $X(t)$ の対数変換 $\ln(X(t))$ は，時間依存する正規確率過程となる．詳細は参考文献(2)に委ねるが，式(3)と等価な幾何ブラウン運動のパラメータを推定して，その結果から式(3)に必要なパラメータを求めることを行う．幾何ブラウン運動に対して変数変換により，$y(t) = \ln(X(t))$ とし，「伊藤の公理」により式(2)を得る．

$$y(t) = y(0) + (\mu_0 - 0.5{\sigma_0}^2)t + \sigma_0 B(t) \tag{10}$$

ここで，式(10)は，式(9)の算術ブラウン運動モデルに変換されて，平均 $y(0) + (\mu_0 - 0.5{\sigma_0}^2)t$，分散 ${\sigma_0}^2 t$ の正規分布に従うことがわかる．

キーワード:　トンネル覆工，維持管理，確率微分方程式
連絡先:〒158-8557　世田谷区玉堤 1-28-1　TEL 03-5707-0104，E-mail:omaruya@tcu.ac.jp

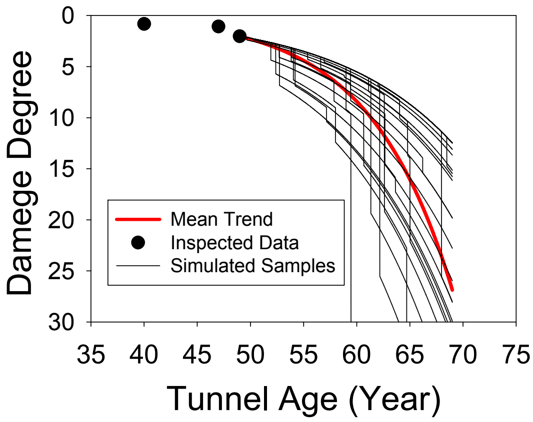

図-1　劣化予測サンプル実現値

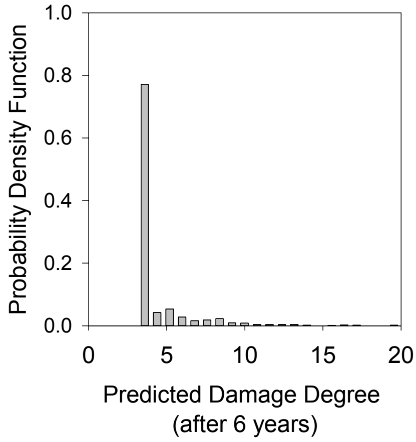

図-2　予測値の確率分布(1)

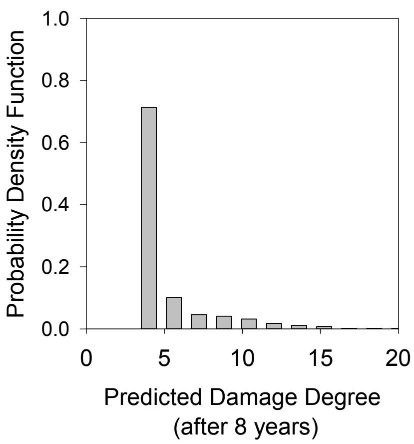

図-3　予測値の確率分布(2)

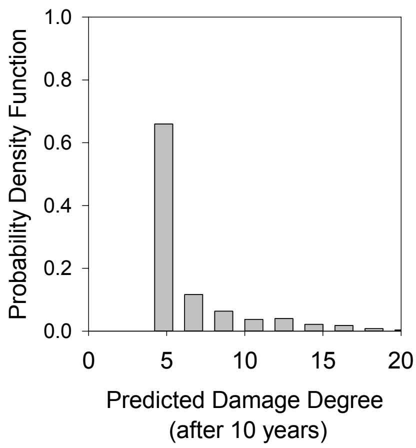

図-4　予測値の確率分布(3)

次に，離散データに対してインデックス番号を与え，式(9)を離散データに対して表現する．

$$y(t_{n+1})-y(t_n)=(\mu_0-0.5\sigma_0^{\,2})(t_{n+1}-t_n) \\ +\sigma(B(t_{n+1})-B(t_n)) \tag{11}$$

観測される時系列データ $(X(t_0), X(t_1), \cdots, X(t_N))$ を考えると，最尤法により係数 (μ_0, σ_0) の推定値はそれらの観測データが最も高い確率で抽出されるように算出される．すなわち，確率密度関数を $P(\cdot)$ とすると，以下の対数尤度関数を最大とするように求められる．

$$\ln p(X(t_0), X(t_1), \cdots, X(t_N)) \\ =\ln p(y(t_0), y(t_1), \cdots, y(t_N))-\sum_{n=0}^{N}\ln(X(t_n)) \tag{12}$$

以上のように求められたパラメータ μ_0, σ_0 から，ポアソン分布強度 λ を仮定したうえで，指数分布の平均 $\nu=\sigma_0/\sqrt{2\lambda}$ を求めると，Y_k のジャンプの 2 次モーメントを，$q_2=2\nu^2$ として算出できる．

4.　数値計算例

本研究では，北海道内のドンネルの点検データをもとにした計算例を示す．対象としたトンネルでは，トンネルの竣工後の経過年 40 年，47 年および 49 年に行われた点検により劣化度が求められている．

図−1 は，点検データから求められたパラメータの推定値により再現された 49 年以降の将来予測のサンプル，点検データおよび平均的な劣化度を示している．図−2～4 は，経過年 49 年以降の劣化度の確率密度関数の予測を行ったものである．これらは，5, 000 サンプルから計算されたものである．数少ない 3 回の点検データに基づく結果であるが，今後のデータに蓄積により精度の向上が期待され，点検時期および補修・補強計画に有用な情報を与えるものとなることが期待される．

参考文献 1. H. Tanaka, O. Maruyama, A. Sutoh: Probabilistic Model for Damage Accumulation in Concrete Tunnel Lining and its Application to Optimal Repair Strategy, ICASP11，2011.
2. 丸山收，須藤敦史，田中泰明他：トンネル覆工コンクリートの確率論的予測モデルの構築，JCOSSAR2011 論文集，2011.