

モーメント方程式を用いた1次元管路に置かれた多孔質媒体周辺の流れの解析

京都大学大学院工学研究科 学生員 ○湯澤 史也
 京都大学大学院工学研究科 正会員 白井 秀和
 京都大学大学院教授 フェロー 細田 尚

1. はじめに

流れの現象を明らかにしていく上で、計算格子を用いた数値解析は有効な方法の一つとなってきた。しかし、対象とする現象によっては、その解析精度が格子幅に強く依存することもあり、計算コストが大きくなる場合がある。このような場合に、計算コストを抑えながら、ある程度の解析精度を保障できる解析手法があれば、工学上有用である。例えば、CIP法¹⁾は、セル間での物理量の空間分布を多項式で表し、物理量とその勾配を計算することで、高精度な移流計算を行う手法として知られている。

本研究では、多孔質媒体を有する一次元管路内の流れを対象とし、多孔質媒体の幅が計算格子幅よりも小さく、従来の解析手法ではその多孔質媒体の存在を十分に考慮できない場合について考える。本研究ではセル間での圧力分布を空間座標の多項式で表現することで格子内の多孔質媒体の存在を考慮する。CIP法では、セル間での接続条件及び物理量だけでなく、物理量の勾配を用いることで物理量の空間分布を表す多項式を決定するが、本研究では、物理量の勾配ではなく、物理量のモーメントを用いることで、圧力分布を表す多項式を決定する方法について検討し、その適用性について検証する。

2. 計算対象

多孔質媒体を有する流れの基礎式は、次式に示す連続式と運動方程式である。

$$\frac{\partial((1-c)u+ca)}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(1-c)u}{\partial t} + \frac{\partial(1-c)uu}{\partial x} \\ & = -(1-c)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}\right) - \frac{g}{k}(1-c)^2(u-a) \end{aligned} \tag{2}$$

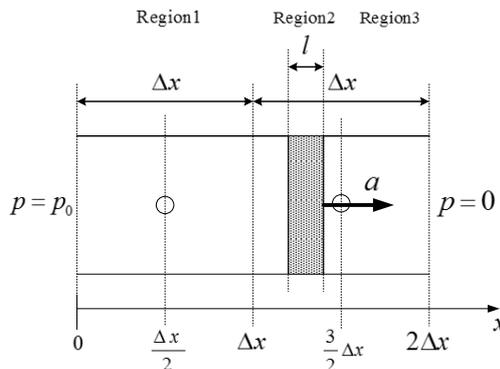


図-1 対象とする流れ場

ここに、 t : 時間、 x : 空間座標、 u : 流速、 g : 重力加速度、 $1-c$: 多孔質媒体の空隙率、 a : 多孔質媒体の移動速度、 k : 多孔質媒体の透水係数、 p : 圧力、 ρ : 流体の密度である。

本研究では、管路内に多孔質媒体が速度 a で移動しているような場合について考え、図-1のように二つの格子を設定した際に、Region2の多孔質媒体の存在を考慮できるような解析手法について検討する。

3. 解析手法

各セル区間 $[0 \leq x \leq \Delta x]$, $[\Delta x \leq x \leq 2\Delta x]$ におけるそれぞれの圧力の分布形状を、以下のように3次の多項式で仮定する。

$$p_{r1}(x) = p_{\frac{1}{2}} + p_1 x'_1 + p_2 x'^2_1 + p_3 x'^3_1 \tag{3}$$

$$p_{r2}(x) = p_{\frac{3}{2}} + p'_1 x'_2 + p'_2 x'^2_2 + p'_3 x'^3_2 \tag{4}$$

ここに、 $x'_1 = x - \Delta x/2$, $x'_2 = x - 3\Delta x/2$ であり、 $p_{\frac{1}{2}}$, p_1 , p_2 , p_3 , $p_{\frac{3}{2}}$, p'_1 , p'_2 , p'_3 は、未知数である。

これらの多項式の係数を以下の制約条件、およびモーメント方程式から決定する。

まず、制約条件により以下の6つの関係式を得る。

$$p_1(0) = p_0, p_1(\Delta x) = p_2(\Delta x), p_2(2\Delta x) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_1(x) \Big|_{x=\Delta x} = \frac{\partial}{\partial x} p_2(x) \Big|_{x=\Delta x} \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=0} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) \Big|_{x=0}, \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=2\Delta x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) \Big|_{x=2\Delta x} \quad (7)$$

運動方程式に x^0 を乗じ、区間 $[\Delta x/2, 3\Delta x/2]$ で積分すると次式の 0 次モーメント方程式が得られる。

$$\int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{3\Delta x}{2}} \frac{\partial(1-c)u}{\partial t} dx + \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{3\Delta x}{2}} \frac{\partial(1-c)uu}{\partial x} dx \quad (8)$$

$$= -\int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{3\Delta x}{2}} (1-c) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{\rho} \right) dx - \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{3\Delta x}{2}} \frac{g}{k} (1-c)^2 (u-a) dx$$

同様にして、 x^1, x^2 をそれぞれ乗じて得られる 1 次、2 次のモーメント方程式は次式の通りである。

$$\int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{3\Delta x}{2}} \frac{\partial(1-c)ux}{\partial t} dx + \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{3\Delta x}{2}} \frac{\partial(1-c)uux}{\partial x} dx \quad (9)$$

$$- \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{3\Delta x}{2}} (1-c)uu dx$$

$$= -\int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{3\Delta x}{2}} (1-c) \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{P}{\rho} \right) dx + \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{3\Delta x}{2}} (1-c) \frac{P}{\rho} dx$$

$$- \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{3\Delta x}{2}} \frac{g}{k} (1-c)^2 (u-a)x dx$$

$$\int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{3\Delta x}{2}} \frac{\partial(1-c)ux^2}{\partial t} dx + \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{3\Delta x}{2}} \frac{\partial(1-c)uux^2}{\partial x} dx \quad (10)$$

$$- \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{3\Delta x}{2}} (1-c)uu 2x dx$$

$$= -\int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{3\Delta x}{2}} (1-c) \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{P}{\rho} \right) dx + \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{3\Delta x}{2}} (1-c) 2x \frac{P}{\rho} dx$$

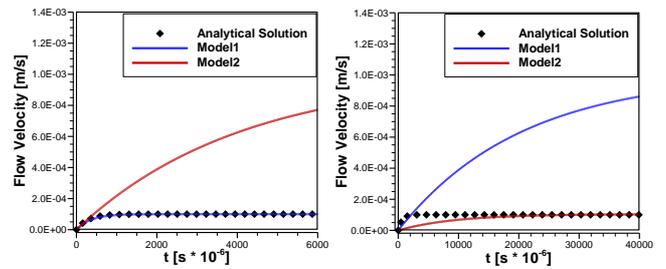
$$- \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{3\Delta x}{2}} \frac{g}{k} (1-c)^2 (u-a)x^2 dx$$

これらの式(5)~(10)によって、多項式の係数が決定される。

4. 解析結果とその考察

セルごとに圧力が一様としたモデル(Model1)と、上記で示したように、圧力分布を三次関数と仮定したモデル(Model2)を、理論解と比較することでモデルの適用性を検証する。

図-2 は多孔質媒体長を格子幅の 1/2 に設定した場合と、1/10 に設定した場合、媒体内の流速の時間経過を示したものである。これらのグラフから、媒体の長さが格子幅に対して短くなると Model2 の方が



(媒体幅:格子幅=1:2) (媒体幅:格子幅=1:10)

図-2 各 Model と流速の理論解との比較

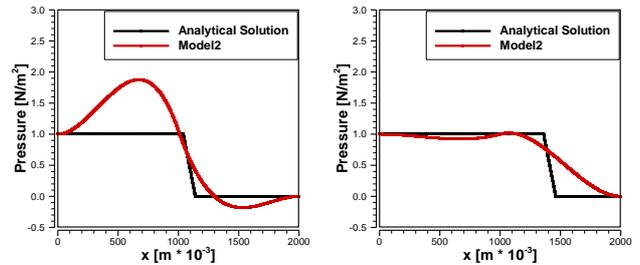


図-3 多孔質媒体の移動に伴う圧力分布の変化

理論解に近い結果となり、多孔質媒体幅が格子幅より小さい場合に再現性が良くなることが確認できる。

図-3 は Model2 の圧力分布形状が媒体の移動に伴い、どのように変化していくのかを示したもの(格子幅の 1/10 に設定したケース)である。この図から、本モデルにおいて、媒体の移動を考慮できていることが確認できる。

5. おわりに

本研究では、一次元管路内を一定の速度で移動する多孔質媒体周辺の流れ解析に際して、圧力分布を 3 次関数によって仮定した解析モデルを導出し、その適用性について考察した。結果をまとめると以下の通りである。

- ▶ 媒体幅が格子幅に対して短ければ、セルごとに圧力を一様と仮定したモデルと比較して再現性が良くなることが確認された。
- ▶ 本研究で導出した解析モデルでは、媒体の移動に伴う圧力分布の変化をある程度考慮できていることが確認された。

参考文献

1) Yabe, T. and Aoki, T. : Universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation I, One-dimensional solver, *Comput. Phys. Commun.*, Vol.66, pp.219-232, 1991.