運動量補正係数を考慮した基礎式による転波列の数値解析

日本学術振興会 特別研究員　正会員　○白井　秀和
京都大学大学院 教授　フェロー　細田　尚
（独）鉄道・運輸機構　正会員　金澤　直矢

１．はじめに

転波列は，開水路流れの不安定現象として表れる流れであり，その発生限界や波形などの特性について古くから研究が行われている．

本研究では，この転波列が十分に発達した波形を対象とする.転波列の波形を取り扱ったものとして，Dressler[1)]による解析法が挙げられる．この解析法では，波速を与えなければ，一意の波形が決定しないことが示されている．これに対して，石原ら[2)]，岩垣・岩佐[3)]は，基礎式に流速分布による補正係数を考慮し，乱流では 1.05，層流では 1.2 を与えることで，一意の波形が決定されることを示しており，Dressler と異なる結果となっている．

本研究では，ここに着目し，この違いが生じた原因を明らかにするために，石原ら，岩垣・岩佐の解析法の導出過程について再検討するとともに，運動量補正係数が 1.0 でない場合の基礎式を用いた転波列の数値解析を行い，一意の波形に決まらないことを示す．また，得られた解析結果を石原ら，岩垣・岩佐の理論解と比較することにより，運動量補正係数に応じた波長・波高の変化が大きく異なる結果となることを示す．

２．石原ら[2)]，岩垣・岩佐[3)]の解析法

ここで，石原ら，岩垣・岩佐の解析法について再検討する．用いる基礎式は次式の通りである．

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial uh}{\partial x}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\beta u\frac{\partial u}{\partial x}+(1-\beta)\frac{u}{h}\frac{\partial h}{\partial t}=g\left(\sin\theta-\frac{\partial h}{\partial x}\right)-\frac{fu^2}{h} \tag{2}$$

ここに，t : 時間，x : 空間座標，u : 流速，h : 水深，g : 重力加速度，β : 運動量補正係数，θ : 水路の傾斜角，f : 摩擦損失係数である．

波形が変形することなく波速 c で移動するとし，式(1)，(2)を座標系$\xi = x\text{-}ct$ と変換し，式(3)を用いて無次元化を行うことで，式(4)が得られる．

$$\xi'=\xi/h_0,\ H'=h/h_0,\ K'=K\Big/\sqrt{gh_0}h_0, \\ c'=c\Big/\sqrt{gh_0},\ \sin\theta= fFr_0{}^2 = fu_0{}^2/gh_0 \tag{3}$$

$$\frac{dH'}{d\xi'}=f\,\frac{Fr_0{}^2H'^3-(c'H'+K')^2}{H'^3-(1-\beta)c'^2H'^2-\beta K'^2} \tag{4}$$

ここに，h_0 : 等流水深，K : 進行流量であり，連続式により $K = (u\text{-}c)h$ = const.である．

Dressler は，式(4)において$\beta = 1$ を代入した時，$H' = K'^{2/3}$ で特異点となることから，次式に示す波速の関係を導出している．

$$c'=-(Fr_0+1)K'^{1/3} \tag{5}$$

これに対して，石原ら，岩垣・岩佐は，式(4)において，等流水深，つまり $H' = 1$ で特異点となると仮定することで，次式に示す波速の関係を得ている．

$$c'=\frac{(\beta+1)Fr_0+\sqrt{(\beta-1)^2Fr_0{}^2+4}}{2} \tag{6}$$

これら式(5)，(6)から，フルード数と運動量補正係数を与えた時，式(5)では波速が決まらないのに対して，式(6)では波速が決定されることがわかる．石原ら，岩垣・岩佐らの解析法において波速を与える必要が無く，Dressler の解析法と大きく異なる結果になる原因はこれによるものである．しかし，ここで注意したいのは，石原ら，岩垣・岩佐における解析法では，波速の関係の導出の際に，等流水深で特異点となることを仮定していることであり，この仮定が条件を限定していることになっているということである．つまり，この解析法で得られる波形は，限られた条件の下で得られた波形となってしまうことになる．

キーワード　転波列，開水路非定常流，数値解析
連絡先　〒615-8540　京都府京都市西京区京都大学桂 C1-3 河川流域マネジメント工学講座　TEL075-383-3269

３．基礎式及び数値解析手法

石原ら，岩垣・岩佐の解析法による理論解と比較するために，金澤ら[4]と同様の水理条件，解析手法を用いて数値解析を行う．用いる基礎式は，次式に示す浅水流方程式である．

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \tag{7}$$

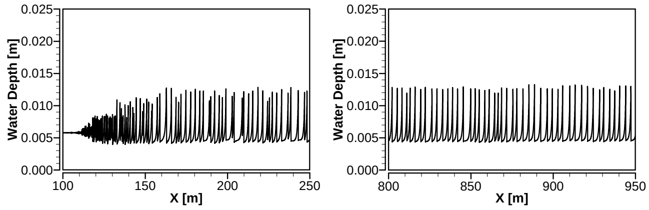
$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial \beta uQ}{\partial x}+gA\frac{\partial z_s}{\partial x}=-gA\frac{\tau_b}{\rho gR} \tag{8}$$

ここに，t：時間，x：空間座標，Q：流量，u：流速，A：流水断面積，g：重力加速度，z_s：基準水面からの水位，ρ：密度，R：径深$(=A/(2h+B))$，h：水深，B：水路幅である．τ_b：底面せん断応力であり，ここではマニング則を用いたケースと摩擦損失係数による抵抗則を用いたケース，それぞれで評価する．

４．数値解析結果と理論解の比較

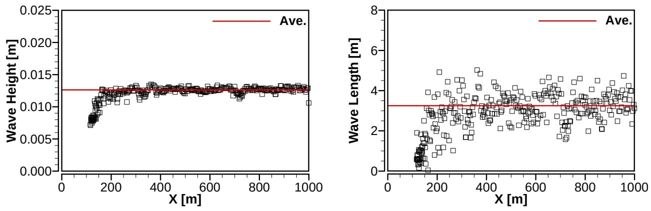
まず，マニング則を用いて，運動量補正係数を 1.05 として与えた場合の数値解析によって得られた水深の空間分布を**図-1** に示す．これらの図から転波列が形成され，下流に進むにつれて転波列が発達していく過程が確認できる．**図-2** は，(a)波高と(b)波長の空間分布を示したものであり，波高と波長ともに，ある程度下流に進むとその増加傾向が見られなくなることがわかる．また，十分に発達した下流域では，波長が一意とはならず，様々な波長が存在する結果となっている．これは，金澤ら[4]が運動量補正係数を 1.0 として解析した場合と同じ傾向であり，波長が一意に決まらないという点で，運動量補正係数による波長の影響がないことを示している．

つぎに，石原ら，岩垣・岩佐の理論解と比較するために，摩擦損失係数による抵抗則を用いた数値解析を行った結果を示す．**図-3** は，運動量補正係数を 1.0 から 1.05 まで変化させて，それぞれ解析を行った時の(a)波高と(b)波長である．実線は，理論解であり，白の四角でプロットしたものが，数値解析によって得られた下流域の x=800～950m での平均の波高と波長である．これらの結果から，運動量補正係数に応じた波高，波長の変化が理論と数値解析結果で異なる傾向を示している．これは，先述した通り，理論解で得られる波形が，限定的な条件での波形であることが大きな原因と考えられる．



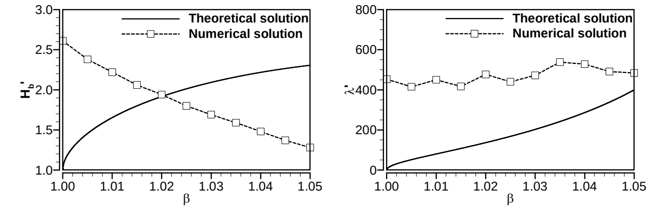
(a) x=100-250 m　(b) x=800-950 m

図-1　水深の空間分布図



(a) 波高　(b) 波長

図-2　波高，波長の空間分布図



(a) 波高　(b) 波長

図-3　理論解と数値解析結果との比較

５．おわりに

本研究では，石原ら，岩垣・岩佐の解析法について再検討し，得られる波形が限定的な条件での波形であることを示すとともに，運動量補正係数を加えた基礎式による転波列の数値解析を行うことで，十分に発達した波が一意の波形に定まらず，様々な波長が存在することを示し，石原ら，岩垣・岩佐の解析法と異なる結果になることを示した．

参考文献

1) Dressler, R. F. : Mathematical solution of the problem of roll-wave in inclined open channels, *Commn. Pure Appl. Math.*, Vol.2, No.213, pp.149-194, 1949.

2) 石原藤次郎，岩垣雄一，岩佐義朗 ：急斜面上の層流における転波列の理論 -薄層流に関する研究(第 5 報)-，土木学会論文集，第 19 号，pp.46-57, 1954.

3) 岩垣雄一，岩佐義朗 ：転波列の水理学的特性について -薄層流に関する研究(第 7 報)-，土木学会誌，40-1, pp.5-12, 1955.

4) 金澤直矢，白井秀和，細田尚:転波列の発達・分裂過程に関する数値解析的研究，第 67 回土木学会年次学術講演会講演概要集，2-041, pp.81-82, 2013.