準二次元非定常流計算の一つの試み(Dronkers 手法との連携)

正会員　馬場洋二

１．はじめに

準二次元非定常流の実用計算の検討が少ないと思われる。ここでは、比較的入り込み易い Dronkers の非定常流計算手法に、準二次元（不等流計算）解析の考え方を取り込める計算手法を検討した。仮想的河道断面についての計算を、まだ不十分ながら、実行済みである。

２．開水路の非定常流に対する方程式

運動量方程式は、岩佐[1)]によれば（一部の文字で、(1)式では正確な再現ができていない。）

$$\frac{1}{g}\int\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{dA}+\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial x}\int u^2\mathrm{dA}+\frac{1}{g}\int u_s\frac{\partial h}{\partial t}\mathrm{dz}+\int\frac{1}{g}u_b u_{nb}\mathrm{ds}=\mathrm{Asin}\theta-\int\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{dA}\ -\!\!\int\frac{\tau_{xb}}{\rho g}\mathrm{ds}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(1)$$

ρ：流体の密度、ｇ：重力の加速度、β：運動量補正係数の他、慣用記号を使っています。上式を変形して

$$\frac{1}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{1}{gA}\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta\frac{Q^2}{A}\right)+\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\tau_b}{\rho gR}=0\cdot\cdot\cdot(2)\quad \frac{\tau_b}{\rho gR}=\frac{1}{\rho gA}\sum_i\left\{\frac{\rho g n_i^2 u_i^2 s_{bi}}{R_i^{1/3}}+\sum_{ji}\langle\rho f u_i^2 s_{wji}\rangle\right\}\cdot\cdot\cdot(3)$$

Q:全体流量、H:水位である。τ_bの表現については、「河道計画検討の手引き」[2)]を引用している。右辺第一項は、分割断面ｉに関する底面せん断力の項、第二項は樹木群境界に作用するせん断力、R：径深、A：全断面河積、n_i：マニングの粗度係数、u_iは分割断面の平均流速、s_bは底面せん断力が働く潤辺長、s_w は樹木群境界の潤辺長、f は境界混合係数、添字 iはｉ番目の分割断面」についての量であることを表す。添字j_iはｉ番目の分割断面にかかわる境界についての量であることを表す。

一方、準二次元解析の特徴の一つが、次の分割断面 i についての運動式で、次のように表されている。

$$\frac{n_i^2 u_i^2}{R_i^{1/3}}s_{bi}+\frac{\sum_{ji}(\tau'_{ji}s'_{wji})}{\rho g}+\frac{\sum_{ji}(\tau_{ji}s_{wji})}{\rho g}=A_i\mathrm{I}\cdot\cdot\cdot(4),\quad \tau_{ji}=\rho f u_i^2,\ \tau'_{ji}=\rho f(\Delta u_{ji})^2\mathrm{sign}(\Delta u_{ji})$$

ここにτ_{ji}は樹木群境界（の一つに）作用するせん断力、τ'_{ji}は樹木群境界以外の分割断面境界に作用するせん断力、s'_wは樹木群境界以外の分割断面境界の潤辺長、I はエネルギー勾配である。τ_{ji} は樹木群内を死水域（u=0）と考えているため、流速の二乗に比例する形である。Δu は、τ' が作用する境界に接する隣の断面との流速差である。sign(Δu)は、当該分割断面の平均流速が隣の分割断面の平均流速より小さい場合は -1 を、大きい場合は +1 を取らせる。非定常流での（４）式の成立を仮定する。

不等流計算適用の場合には、運動量補正係数を、β≒1.1 あるいは 1.0 を標準とするとされている。また二断面間の損失計算には標準逐次法が使用され、上下二断面による損失の平均値が採用される。なかでも準二次元解析の最大の特徴が、（４）式を適用して、各分割断面の平均流速の横断分布を求めることである。

３．非定常流の陰形式差分法（Dronkers の方法）の応用

Dronkers の非定常流の差分式による解法は、測点間隔が等しくなくともよく、極めて安定な計算法とされる。前述の不等流計算における標準逐次法との最大の違いの一つは、下流側断面の断面特性やその水理量（しかも前時刻の）を使って、H、Q を求める手法にあるかも知れない。そのため上下二断面間の摩擦損失等（河床面せん断力、分割断面の樹木群境界せん断力、および分割断面における樹木群境界面以外のせん断力によるのを指す。）の計算には、上下流二断面の断面特性による平均的損失を評価する必要がある。上下流断面が類似であれば、その評価が容易で正確となる。類似でないと正確でなくなる可能性がある。

キーワード：　非定常流、準二次元数値計算、陰形式差分、Dronkers
連絡先：〒818-0036　福岡県筑紫野市光が丘 3-9-3　　TEL：092-926-7211、FAX：092-926-7212

我が国河川を全般的に概観した場合、下流側断面の断面特性やその水理量を多く使う場合には、（３）式右辺の二項の評価方法として、不等流計算の標準逐次計算手法の他に、コントロールボリュームを上下二断面間（断面まで含む）に適用して、統一的（平均的あるいは巨視的）観点から分割断面を設定するのが、より有効であると考えられる。[3]　すると分割断面数の削減が可能な場合も出てくる。要は、標準逐次法の上下二断面によるエネルギー損失の１/２を計上する手法ではなくて、上下二断面間河道を巨視的に見て、少数の分割断面の設定に基づいた損失を評価計上できればというものである。

そう考えた場合の（３）式右辺は、次のように評価計上され,更に差分化に適した形に変形する。なお、境界混合係数 f の下付き添字に t のはいったものは、樹木群境界の境界混合係数を表している。

$$\text{第一項}= \frac{1}{gA}\sum_i \frac{gn_i^2}{A_iR_i^{4/3}}Q_i^2 = \frac{1}{gA}C^2Q^2 \text{ , } Q=\sum_i Q_i \text{ , } C^2 = \left(\sum_i \frac{gn_i^2}{A_iR_i^{4/3}}Q_i^2\right)/Q^2$$

$$\text{第二項} = \frac{1}{gA}\sum_{ji}\left(fu_i^2 s_{wji}\right) = \frac{1}{gA}\sum_i (f_{itL}s_{itL} + f_{itR}s_{itR})u_i^2 = \frac{1}{gA}\sum_i\left(\frac{(f_{itL}s_{itL}+f_{itR}s_{itR})}{A_i^2}Q_i^2\right) = \frac{1}{gA}D^2Q^2$$

$$D^2 = \left(\sum_i\left(\frac{(f_{itL}s_{itL}+f_{itR}s_{itR})}{A_i^2}Q_i^2\right)\right)/Q^2 \text{ , } \quad \frac{\tau_b}{\rho gR} = \frac{1}{gA}(C^2Q^2 + D^2Q^2) = \frac{1}{gA}(C^2 + D^2)Q^2$$

全体の差分は Dronkers　にならうが、運動量補正係数 β の差分は次のようにした（別法もある)。

$$\frac{\partial\beta}{\partial x} = \frac{\beta_{m-1}^{n+1} - \beta_m^{n+1}}{\Delta x_{m-1}} \text{ 、 } \quad \frac{\beta}{gA^2} = \frac{1}{2g(A^2)_{m-1}^n}\left(\frac{\beta_m^{n+1}+\beta_m^n}{2} + \frac{\beta_{m-1}^{n+1}+\beta_{m-1}^n}{2}\right) = \frac{(\beta_m^{n+1}+\beta_{m-1}^{n+1}+\beta_m^n+\beta_{m-1}^n)}{4g(A^2)_{m-1}^n}$$

更に、重要な係数群[4] を記述する。なお、x 軸を、上流から下流に向けて取り、測点番号mは、下流端を 1、上流に向けて２，３、・・と取る。またΔx_{m-1}は、m、m-１両断面間の縦断距離である。

$$\text{EETA(m-1)} = \frac{(Q_m^n+Q_{m-1}^n)}{4g(A^2)_{m-1}^n}(2\beta_m^{n+1} + \beta_m^n + \beta_{m-1}^n) - \frac{\Delta x_{m-1}}{2gA_{m-1}^n\Delta t} - \frac{(C^2)_{m-1}^n+(D^2)_{m-1}^n}{4gA_{m-1}^n}\left| Q_m^n + Q_{m-1}^n\right|\Delta x_{m-1}$$

$$\text{SITA(m-1)} = -\frac{(Q_m^n+Q_{m-1}^n)}{4g(A^2)_{m-1}^n}(2\beta_{m-1}^{n+1} + \beta_m^n + \beta_{m-1}^n) - \frac{\Delta x_{m-1}}{2gA_{m-1}^n\Delta t} - \frac{(C^2)_{m-1}^n+(D^2)_{m-1}^n}{4gA_{m-1}^n}\left| Q_m^n + Q_{m-1}^n\right|\Delta x_{m-1}$$

$$\text{MYU(m-1)} = -\frac{\Delta x_{m-1}}{2gA_{m-1}^n\Delta t}(Q_m^n + Q_{m-1}^n) \text{ , NYU(m-1)} = -\frac{\Delta x_{m-1}B_{m-1}^n}{2\Delta t} \text{ , XAI(m-1)=NYU(m-1)}(H_m^n + H_{m-1}^n)$$

上のような表現を取った場合、Dronkers の特徴的方程式二式が次のように求まる。

$$H_m^{n+1} - H_{m-1}^{n+1} + \text{EETA(m-1)}Q_m^{n+1} + \text{SITA(m-1)}Q_{m-1}^{n+1} = \text{MYU(m-1)}$$

$$\text{NYU(m-1)}(H_m^{n+1} + H_{m-1}^{n+1}) + Q_m^{n+1} - Q_{m-1}^{n+1} = \text{NYU(m-1)}(H_m^n + H_{m-1}^n) = \text{XAI(m-1)}$$

ここで未知数はH_m^{n+1} , H_{m-1}^{n+1} , Q_m^{n+1} , Q_{m-1}^{n+1} , β_m^{n+1} , β_{m-1}^{n+1} の 6 個である。そのうちQ^{n+1} とβ^{n+1} とは積の形となるので、基本的には非線型連立方程式である。しかし未知数のβ^{n+1}は、H^{n+1}により決定されることから、厳密な意味での非線型ではない。スムーズな計算が出来、この手法の実用化が図られれば有益と考えられ、効果的な収束計算手法の開発が望まれるが、収束計算に、その緩い非線型性を利用できないかと考えている。計算結果や発展性について講演時に述べる。

1)岩佐義朗：水理学、朝倉土木講座３、昭和 43 年 5 月、170 頁
2)（財）国土技術研究センター編：河道計画検討の手引き、山海堂、平成 15 年 2 月
3)手法については、禰津家久・冨永晃宏：水理学、朝倉書店、2000 年 4 月、が詳しい。
4)土木学会編：水理公式集、昭和 46 年改訂版、昭和 48 年 2 月、191 頁