

円筒内外の流体を考慮した ガイド波の伝搬特性

○東京工業大学大学院 学生会員 小原 稔生
東京工業大学大学院 正会員 古川 陽
東京工業大学大学院 正会員 廣瀬 壮一

1. はじめに

ガイド波は縦波や横波などの実体波と比較して伝搬に伴うエネルギーの損失が少ないという利点をもつため、配管やレールなどの長大構造物の非破壊検査への応用が期待されてきた¹⁾。本研究では、円筒内外ともに流体で満たされた円筒を伝搬するガイド波の特性の把握を行い、同条件下でのガイド波を用いた非破壊検査の実用性について検討する²⁾。以下では、ガイド波を用いた非破壊検査に必要な分散曲線を得るための特性方程式を示す。その後得られた特性方程式を解き、理論解析による分散曲線を示す。そして分散曲線から得られる伝搬特性を数値解析によって確認するために、有限要素法(FEM)を用いたガイド波の伝搬シミュレーションを行う。なお、本研究では複数あるガイド波のモードのうち、Longitudinal(L) モードを取り扱うこととする。

2. 円筒を伝わるガイド波の理論

(1) 円筒に作用する変位と応力の表示式

内径 a 、外径 b 、密度を ρ 、ラメ定数を λ, μ 、断面変化及び屈曲のない無限長の配管を考える。配管は均質な等方弾性体とし、縦波速度は $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ 、横波速度は $c_T = \sqrt{\mu/\rho}$ で表現される。時刻 t において円柱座標 (r, θ, z) を用いて配管を伝搬する波動のポテンシャル関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\Phi &= [B_1 J_0(k_l r) + B_2 Y_0(k_l r)] e^{i(\omega t - kz)} \\ \Psi &= [B_3 J_1(k_t r) + B_4 Y_1(k_t r)] e^{i(\omega t - kz)}\end{aligned}\quad (1)$$

ここに、 $B_j (j = 1, 2, 3, 4)$ は定数とし、 i は虚数単位、 ω は角周波数、 k は波数の z 方向成分を表す。また、 J_n および Y_n は n 次の第一種および第二種ベッセル関数を表す。さらに、 k_l, k_t は次式で与えられる。

$$k_l^2 = (\omega/c_L)^2 - k^2, k_t^2 = (\omega/c_T)^2 - k^2 \quad (2)$$

円柱座標における変位は式 (1) を用いて

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}, u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\Psi}{r} \right) \quad (3)$$

と表現できる。そして変位-ひずみ関係は

$$\epsilon_{ij} = (u_{ij} + u_{ji})/2, (i, j = r, \theta, z) \quad (4)$$

で与えられる。ただし u_{ij} は、例えば $(i, j) = (r, z)$ に対して $u_{rz} = \partial u_r / \partial z$ で与えられる。円筒に作用する応力 σ_{ij} は

フックの法則を用いて

$$\sigma_{ij} = \lambda \Delta \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}, (i, j = r, \theta, z) \quad (5)$$

で表現される。ここに δ_{ij} は Kronecker delta, Δ は膨張量を表し、 $\Delta = \nabla^2 \phi$ で与えられる。

(2) 筒内満水かつ水中のパイプ (FSF モデル)

本研究の目的である、円筒内外ともに流体で満たされたパイプに対する特性方程式を求める³⁾。以下では、これを FSF (Fluid-Solid-Fluid) モデルと呼ぶ。FSF モデルでは、式 (3)、式 (5) に示す円筒に作用する変位と応力に加え、筒内外の流体に作用する変位と応力を考える。筒外と筒内の水中を長手方向に伝搬する波のポテンシャル関数をそれぞれ Φ_{wo}, Φ_{wi} とする。 Φ_{wo} は r 方向に伝搬する波の振幅が無遠方 ($r \rightarrow \infty$) に伝わりと漸近的に 0 に近づく (ゾンマーフェルト放射条件) 性質を考慮し、 Φ_{wi} は $r \rightarrow 0$ を考えたとき有限の値となることを考え、以下のように定義する。

$$\begin{aligned}\Phi_{wo} &= [B_5 H_0^{(2)}(k_w r)] e^{i(\omega t - kz)} \\ \Phi_{wi} &= [B_6 J_0(k_w r)] e^{i(\omega t - kz)}\end{aligned}\quad (6)$$

ここに B_5 と B_6 は定数、 $H_0^{(2)}$ は 0 次の第二種ハンケル関数、 k_w は流体の縦波速度 c_w を用いて、

$$k_w^2 = (\omega/c_w)^2 - k^2 \quad (7)$$

で表現される。流体に生じる変位 $u_{r(wo)}, u_{r(wi)}$ (筒外、筒内) と流体中の応力 $\sigma_{rr(wo)}, \sigma_{rr(wi)}$ は流体のポテンシャルを用いて求められる。FSF モデルでは、パイプの内外に対して、以下に示す 6 つの境界条件が必要となる。

$$\left. \begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sigma_{rr(wi)} \\ \sigma_{rz} &= 0 \\ u_r &= u_{r(wi)}\end{aligned} \right\} (r = a) \quad \left. \begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sigma_{rr(wo)} \\ \sigma_{rz} &= 0 \\ u_r &= u_{r(wo)}\end{aligned} \right\} (r = b) \quad (8)$$

この境界条件に各値を代入し、定数 $B_j (j = 1, 2, \dots, 6)$ に関する連立一次式方程式の非自明解を考えれば、FSF モデルに対する特性方程式を得る。

$$D_{\text{FSF}} = |C_{ij}| = 0, (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (9)$$

方程式に角周波数 ω を与え、式 (9) を解くことで、位相速度 c_p 及び減衰 Att を求めることができる。

表-1 解析に用いる材料パラメータ

材料	密度 (g/mm ³)	c_l (mm/ μ s)	c_t (mm/ μ s)
鋼	7.8×10^{-3}	5.94	3.2
水	1.0×10^{-3}	1.5	

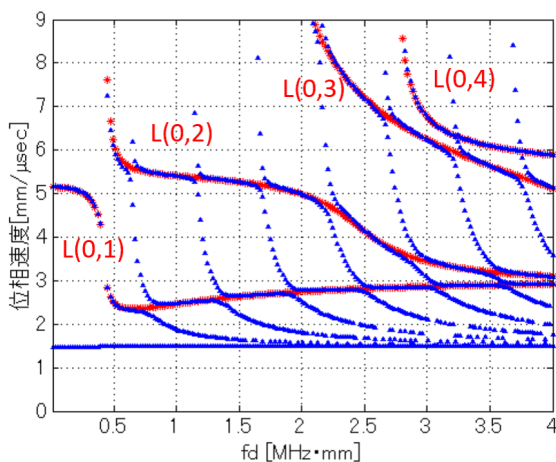


図1 分散曲線 (赤:VSF モデル, 青:FSF モデル)

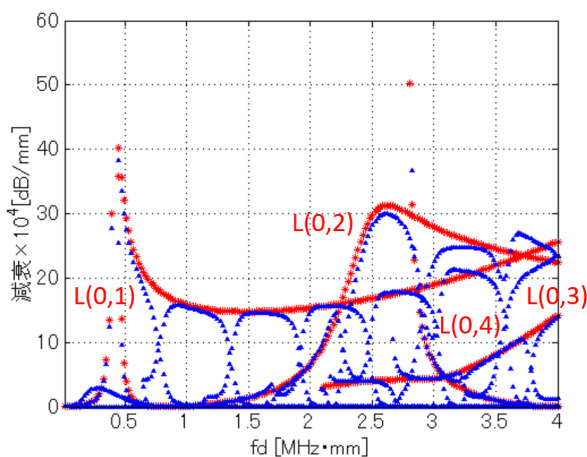


図2 減衰-周波数関係グラフ (赤:VSF モデル, 青:FSF モデル)

3. 理論解析

式 (9) に, 表 1 に示す各パラメータ値を代入し, $(a, b) = (3, 5)$ mm とし, 分散曲線を求めた. ここでは結果を比較するために筒内真空かつ水中の条件下のモデル (VSF) についても方程式を解いた. VSF モデルと FSF モデル双方について位相速度と減衰のグラフを～に示す. FSF モデルでは, VSF モデルと比較して多くのモードの波が発生することがわかる. また, 内側の水の影響により $fd \approx 1.0$ (MHz·mm) ごとに縦に連なるモードが検出された. これらのモードの波は fd が増大するに伴い, 位相速度 $c_p = 1.5$ (mm/ μ s) 付近に漸近する様子が確認できる. 減衰 (k_{Im}) と周波数との関係は図 2 (青△) に示すとおりである. VSF モデルと比較して減衰がやや小さいのは配管内を伝搬する波が内側の流体中で保存されるためである.

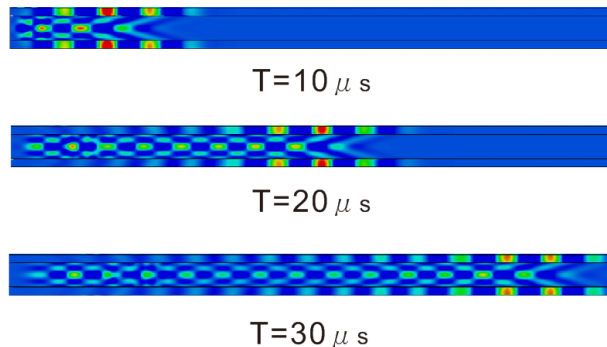


図3 FSF モデルにおけるガイド波の伝搬

4. 有限要素法を用いた数値解析

(1) 解析モデル

解析例として FSF モデルを考える. この解析モデルでは円筒外部の流体の外側に無限要素を配置した. 解析モデルの各寸法 (配管内径 a , 配管外径 b , 流体外径 c , 奥行き L) は以下のとおりである.

$$(a, b, c, L) = (3, 5, 7, 400) \text{ (mm)}$$

また, 材料は円筒は鋼, 円筒内外の流体は水とした. それぞれの材料特性は表 1 に示すものを用いた. ガイド波の伝搬の様子を確認するため, 初期値としては変位を作用させた. 解析に使用した要素は 6 面体ソリッド要素で, その要素長 L^e [m] は波長の 1/10 以下になるように設定した. なお, 解析ソフトとして ABAQUS.ver6.12 を使用した⁴⁾.

(2) 解析結果

解析結果を図 3 に示す. ここでは, 円筒およびその内部の流体の長手方向の変位を示す. 図 3 より, 円筒左端から, 円筒及び流体を伝搬する波動が確認できる. この結果から円筒を伝搬する波は, あまり減衰せずに円筒中を伝搬の様子が確認できる. また, 円筒中で等間隔に変位が検出できた. これは円筒中の複数のモード及び流体中を伝わる波の影響である.

5. 結論

本研究では, 円筒内外の流体を考慮した配管に対するガイド波の伝搬特性を分散曲線から求め, 非破壊検査に適用可能な伝搬モードについて検討を行った. 理論解析と数値解析によって内側の流体の影響で複数の伝搬モードが検出された. 今後の課題としてモードの形状を調査することで, 複雑に交じり合った領域にあるモードの種類を特定する.

参考文献

- 1) D.C. Gazis: Three-dimensional investigation of the propagation of waves in hollow, *J Acoust Soc Am*, Vol.31, No.5, pp568-578, 1959.
- 2) F. Ashmad: Guided waves in a transversely isotropic cylinder immersed in a fluid, *J Acoust Soc Am*, Vol.109, No.886, 2001.
- 3) C. Aristegui, M.J.S. Lowe, P. Cawley: Guided waves in fluid-filled pipes surrounded by different fluids, *Ultrasonics*, Vol.39, pp367-375, 2001.
- 4) Tokyo-tech: 東工大ポータル, <http://portal.titech.ac.jp/>, (2014.4.3).