

平板の曲げ解析への p -Ritz 法の適用に関する一考察

函館工業高等専門学校 正員 渡辺 力

1. まえがき

変分直接法の一つである Ritz 法では、基底関数にべき関数を用いられている。しかし、べき関数を用いる Ritz 法では、級数項（べき関数の次数）が増大すると剛性行列の条件数が大きくなって消去演算での丸め誤差の影響が顕著となることから、べき関数の代わりに種々の関数が基底関数に用いられている。また、平板の曲げ解析に Ritz 法を適用した場合、変位や応力の十分な収束値を得るためには級数項を極めて多く用いる必要があり、丸め誤差の影響を受け易いべき関数を用いる p -Ritz 法¹⁾では高精度な応力や合応力を計算することは困難となる。

本研究では、平板の曲げ解析において高精度な応力と合応力を求めるために、 p -Ritz 法の試行関数に改良を加える。基底関数には、Legendre 多項式や第一種 Chebyshev 多項式などの直交多項式と境界関数を組み合わせた関数を用いる。さらに、 p -Ritz 法の試行関数では高次項を省略した完全多項式状の変位場が用いられるが¹⁾、変位と応力の収束性を改善するために、高次項を省略せずに与えられた展開項数までの全ての項を用いる長方形状の変位場を採用する。

本報告では、改良した p -Ritz 法を一次せん断変形理論に基づく平板の曲げ解析に適用し、精度と適用性を調べた結果について報告する。

2. 試行関数の改良

(1) 試行関数と基底関数

Mindlin の板曲げ理論に基づき、板中央面の変位を次の試行関数で仮定する。

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \phi_{mn}^w(\xi, \eta) \cdot c_{mn}^w \\ \phi_x(\xi, \eta) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \phi_{mn}^x(\xi, \eta) \cdot c_{mn}^x \\ \phi_y(\xi, \eta) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \phi_{mn}^y(\xi, \eta) \cdot c_{mn}^y \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、式(1)の $c_{mn}^w, c_{mn}^x, c_{mn}^y$ は未定係数である。 $\phi_{mn}^w, \phi_{mn}^x, \phi_{mn}^y$ は幾何学境界条件を満たす基底関数で、次式で与える。

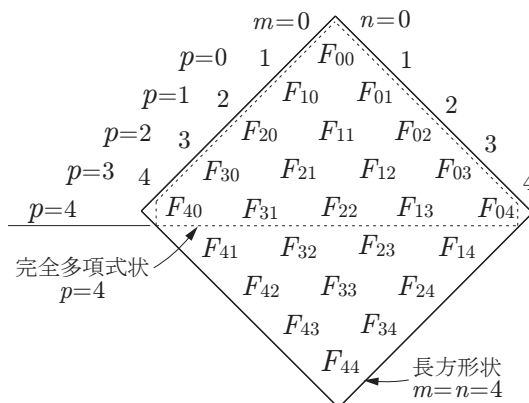


図-1 関数 F_{mn} の階層図 (変位場の採り方)

$$\left. \begin{aligned} \phi_{mn}^w(\xi, \eta) &= \phi_1^w(\xi, \eta) \cdot F_{mn}(\xi, \eta) \\ \phi_{mn}^x(\xi, \eta) &= \phi_1^x(\xi, \eta) \cdot F_{mn}(\xi, \eta) \\ \phi_{mn}^y(\xi, \eta) &= \phi_1^y(\xi, \eta) \cdot F_{mn}(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式(2)の $\phi_1^w, \phi_1^x, \phi_1^y$ は、幾何学的境界条件を満たさせるための境界関数である。また、 p -Ritz 法では関数 F_{mn} にべき関数を用いられるが、本研究では、Legendre 多項式、第一種 Chebyshev 多項式について検討する。

図-1 は、式(1)の試行関数において、展開項数 $M=N=4$ としたときの関数 F_{mn} の階層図である。なお、未定係数 c_{mn}^w などについても同じ階層図となる。 p -Ritz 法では、高次項を省略して、図の点線で囲まれた完全多項式状の変位場が用いられるが¹⁾、本研究では高次項を省略せずに与えられた展開項数までの全ての項を用いる長方形状の変位場を採用する。

(2) 関数 F_{mn}

式(2)の関数 F_{mn} には、 p -Ritz 法で用いられるべき関数の他に、Legendre 多項式、第一種 Chebyshev 多項式を用いる。

1) べき関数

$$F_{mn}(\xi, \eta) = \xi^m \eta^n \quad (3)$$

2) Legendre 多項式

$$F_{mn}(\xi, \eta) = P_m(\xi) P_n(\eta) \quad (4)$$

3) 第一種 Chebyshev 多項式

$$F_{mn}(\xi, \eta) = T_m(\xi) T_n(\eta) \quad (5)$$

Key Words: p -Ritz 法, 基底関数, 曲げ解析

〒042-8501 函館市戸倉町 14-1, TEL:0138-59-6488, FAX:0138-59-6488

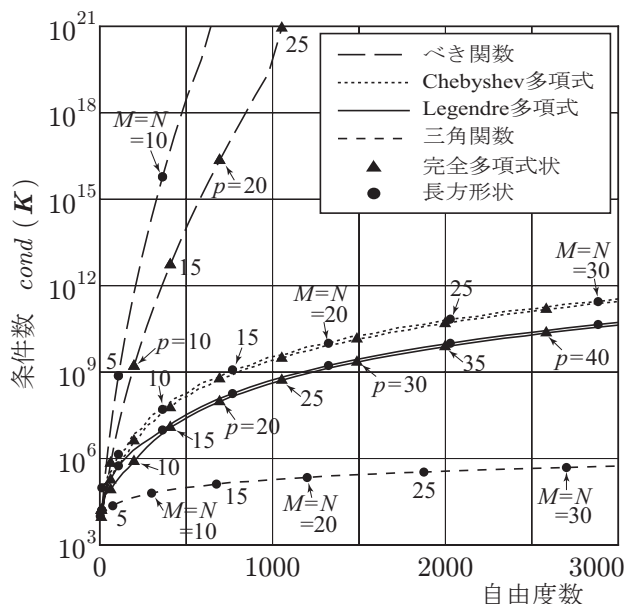


図-2 剛性行列の条件数

3. 数値計算例による考察

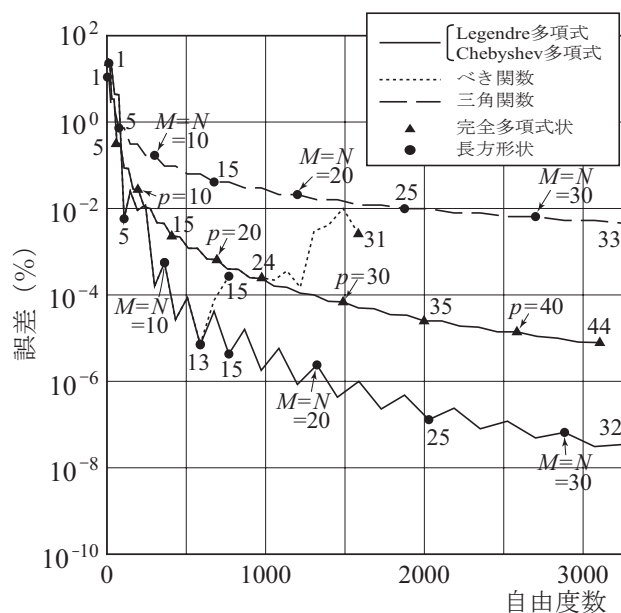
計算モデルは、長さ a 、幅 b 、厚さ h 、形状比 $a/b=1$ 、板厚比 $h/b=1/10$ の周辺単純支持板で、等分布荷重 q_0 を満載する。材料定数は、弾性係数 E 、ポアソン比 $\nu=0.3$ とし、せん断補正係数には $k=5/6$ を用いる。

(1) 条件数による丸め誤差の影響の推察

べき関数を用いる p -Ritz 法では剛性行列の条件数が大きくなって、行列の消去演算で丸め誤差の影響が現れる。ここでは、剛性行列の条件数を調べる。なお、条件数が 10 倍大きくなると、消去演算での解は 10 進法で 1 桁程度悪くなると推定できる。

図-2 は、式 (2) の F_{mn} に、式 (3) のべき関数、式 (4) の Legendre 多項式、式 (5) の Chebyshev 多項式を用いたときの剛性行列の条件数を縦軸に対数で示したもので、横軸には自由度数を取っている。破線がべき関数、点線が Chebyshev 多項式、実線が Legendre 多項式を用いた場合で、▲印は完全多項式状、●印は長方形状に変位場を採った場合である。

図より、べき関数を用いた場合には、極めて条件数が大きくなり、変位場を長方形状に採った場合には完全多項式状に採った場合に比べて条件数が大きくなっている。それに対して、Chebyshev 多項式や Legendre 多項式の直交多項式を用いた場合には、べき関数を用いる場合に比べ条件数がかなり小さくなり、変位場の採り方を長方形状に用いても完全多項式状に用いても条件数はほぼ同じである。さらに、Legendre 多項式の方が、Chebyshev 多項式に比べて条件数が 1 桁ほど小さくなっている。

図-3 板中央点の垂直応力 σ_x の精度

(2) 応力の精度

図-3 は、板中央の垂直応力 σ_x の解析解に対する誤差 (%) を縦軸に対数で示したものである。図の実線が Legendre 多項式と Chebyshev 多項式、点線がべき関数を用いた場合で、▲印は完全多項式状、●印は長方形状に変位場を採った場合である。

同じ変位場を用いた場合、式 (2) の F_{mn} に、Legendre 多項式、Chebyshev 多項式、べき関数のどの式を用いても変位場の次数は同じであるので、丸め誤差の影響が無ければ計算結果は一致する。そのため、Legendre 多項式と Chebyshev 多項式を用いた場合の誤差の計算結果は一致しているが、べき関数を用いた場合には、次数 p や展開項数 $M=N$ が大きくなると丸め誤差の影響が現れている。べき関数を用いた場合 (図の点線) では、完全多項式状に採ったときには次数 $p=24$ 程度で丸め誤差の影響が現れ、 $p=32$ で消去演算ができなくなる。長方形状に採ったときには展開項数 $M=N=13$ 程度で現れ、 $M=N=16$ で消去演算ができなくなっている。

変位場を長方形状に採ったときには、完全多項式状に採った場合に比べて精度が 2 桁ほど改善されている。したがって、曲げ解析においては、変位場を長方形状に採った方がたわみと応力の収束性が改善され、計算効率が良いと言える。

参考文献

- 1) Liew, K.M., Xiang, Y., Kitipornchai, S. and Wang, C.M. : *Vibration of Mindlin Plates: Programming the p-Version Ritz Method*, Elsevier, 1998.