

弾性拘束を受ける各種構造部材の座屈荷重におけるべき乗則の検討

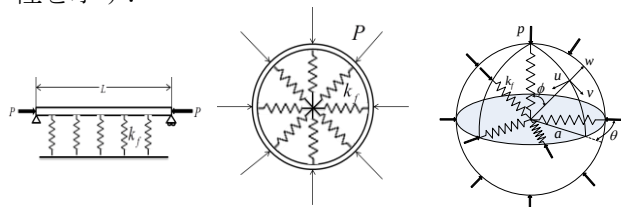
北海道大学大学院工学院 学生会員 ○丸山 俊樹
 北海道大学大学院工学院 学生会員 原澤 祥典
 北海道大学大学院工学研究院 正会員 佐藤 太裕

1. はじめに

一般に弾性拘束を受ける梁やシェルなどの構造部材において、拘束する弾性媒質剛性の増加に伴い座屈モードに高次の波数が含まれることが広く知られている。本研究ではこのような構造部材が弾性拘束を受ける場合において「座屈荷重」と「構造部材-弾性媒質の剛性比」との間に「べき乗則」が成立し得る事を示すものである。構造部材例として Winkler ばねにより支持される、1) 軸圧縮荷重を受ける梁、2) 静水圧荷重を受ける円筒シェル(二次元平面ひずみ状態)、3) 静水圧荷重を受ける完全球シェル、に加えて一般的な三次元弾性体で拘束される以下の二点、1) 静水圧荷重を受ける円筒シェル(二次元平面ひずみ状態)、2) 静水圧荷重を受ける完全球シェルの 5 点を取り上げ、座屈荷重と剛性比とを関係づけるべき乗則を導出し、その特性を検証する。尚、本概要では基本例として Winkler ばねで拘束された梁、円筒シェル、完全球シェルの三点を取り上げた。

2. 解析モデル

図-1 は本研究における各解析モデルを示したものである。P は外圧力を表し等方的に作用するものとする。L は梁の長さを表し、a、ν はそれぞれシェルの半径、ポアソン比を示す。u、v、w はそれぞれ θ 方向、φ 方向、半径方向のシェルの変位を表す。またシェルの厚さを h、各解析モデルのヤング係数を E とする。またシェル内部においては弾性媒質で満たされているものとし、k_f は弾性媒質のばね剛性を示す。



(a)梁モデル (b)円筒シェルモデル (c)完全球シェルモデル

図-1 各解析モデル

3. 座屈荷重の導出

3.1 梁の座屈荷重の導出

弾性媒質を下に有する両端単純支持梁が圧縮力を受けるときの支配方程式は以下のように表される。

$$EIw^{iv} + Pw'' + k_f w = 0 \quad (1)$$

ここで、E、I、w、P、k_f はそれぞれ弾性係数、断面 2 次モーメント、たわみ変位、軸圧縮力、ばね定数を表している。また梁の両端での境界条件は以下になる。

$$x=0, L \text{ において } w=w''=w^{iv}=0 \quad (2)$$

式(1)、(2)より方程式を解くことによって座屈荷重を求めると次式になる。¹⁾

$$P_{\sigma} = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 EI + \left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 k_f \quad n=1,2,3,\dots \quad (3)$$

3.2 円筒シェルの座屈荷重の導出

内部に弾性媒質を有する円筒シェルにおいて外圧 P を受けるときの支配方程式は以下の 2 つの式で表される。

$$EAa^2(v_1' + w_1') + EI(v_1 - w_1)'' = 0 \quad (4)$$

$$EAa^2(v_1' + w_1') - EI(v_1 - w_1)''' + Pa^3(w_1'' + w_1) + k_f a^4 w_1 = 0 \quad (5)$$

ここで、A、a、v₁、w₁ はそれぞれ断面積、シェル内径、座屈後の伸びまたは縮み変位、座屈後の曲げ変位である。また、円筒シェルでは v₁、w₁ は θ の関数となる。

$$v_1 = B \sin n\theta \quad (6)$$

$$w_1 = C \cos n\theta \quad (7)$$

B と C は定数、n は正の整数である。式(4)、(5)から係数行列の行列式が 0 になることにより座屈荷重を求める。¹⁾

$$P_{\sigma} = (n^2 - 1) \frac{EI}{a^3} + \frac{1}{n^2 - 1} k_f a \quad n=2,3,4,\dots \quad (8)$$

3.3 完全球シェルの座屈荷重の導出

完全球シェルの座屈の支配方程式は座屈時変位 u を用い、

$$\begin{pmatrix} c_m^{(11)} & c_m^{(12)} \\ c_m^{(21)} & c_m^{(22)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (9)$$

で求められる。ここで座屈荷重は次式のように代数方程式の固有値問題を解くことで得ることができる。²⁾

$$\det \begin{pmatrix} c_m^{(11)} & c_m^{(12)} \\ c_m^{(21)} & c_m^{(22)} \end{pmatrix} = 0 \quad (10)$$

c_m⁽¹¹⁾、c_m⁽¹²⁾、c_m⁽²¹⁾、c_m⁽²²⁾ はそれぞれ以下のように表すことができる。

$$c_m^{(11)} = (1+k)(\lambda_m + 1 + \nu) + (1+\nu) \frac{w_0}{a} \quad (11)$$

$$c_m^{(12)} = (1+k)(1+\nu)(\lambda_m + 2) + k(\lambda_m^2 + 2k\lambda_m) + \frac{w_0}{a}(1+\nu)(1+\lambda_m) \quad (12)$$

$$c_m^{(21)} = (1+k)(1+\nu) + k\lambda_m + \frac{w_0}{a}(1+\nu) \quad (13)$$

$$c_m^{(22)} = 2(1+k)(1+\nu) + k\lambda_m(\lambda_m + 3 + \nu) + \frac{a^2 k_f (1-\nu^2)}{Eh} + \frac{w_0}{a}(1+\nu)(\lambda_m + 2) \quad (14)$$

ここで、m は波数であり k、λ_m はそれぞれ次式で表される。

$$k = \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \quad (15)$$

$$\lambda_m = m(m+1) - 2 \quad (16)$$

キーワード 座屈荷重、べき乗則、弾性媒質、構造部材、Winkler ばね

連絡先 〒060-8628 北海道札幌市北区北 13 条西 8 丁目 北海道大学大学院工学院 TEL 011-706-6115

4. 解析結果

図-2 と図-3 の座屈荷重比は、算出された座屈荷重に $k_f = 0$ の時の、座屈荷重式 P_0 の逆数を乗じて無次元化したものである。これより、厚肉比と剛性比の増加に伴い座屈荷重も増加する。また、両常用対数をとると直線の傾きが $1/2$ で一定となり、べき乗則に対応することがわかった。また、図-4 は完全球シェルにおける座屈荷重と剛性比を両常用対数にとったものである。ある剛性比の範囲では、傾きがおおよそ $3/2$ となることがわかる。

図-2 と図-3 のべき乗則は式変形からも導出できる。梁の場合について導出していくと下記のようになる。

$$P_0 = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \text{ より}$$

$$\frac{P}{P_0} = n^2 + \frac{1}{n^2} \left(\frac{L}{\pi} \right)^4 \frac{k_f}{EI} \quad (17)$$

式(17)が最小値をとる時の、 n の値は以下となる。

$$n = \frac{L}{\pi} \sqrt[4]{\frac{k_f}{EI}} \quad (18)$$

式(18)を式(17)に代入すると、

$$\frac{P_{cr}}{P_0} = \frac{2}{\pi^2} \sqrt{\frac{L^4}{I}} \sqrt{\frac{k_f}{E}} \quad (19)$$

式(19)の両辺常用対数をとると次式を得る。

$$\log_{10} \left(\frac{P_{cr}}{P_0} \right) = \frac{1}{2} \log_{10} \left(\frac{k_f}{E} \right) + \log_{10} \left(\frac{2}{\pi^2} \sqrt{\frac{L^4}{I}} \right) \quad (20)$$

また円筒シェルの場合について導出していくと、

$$P_0 = \frac{3EI}{a^3} \text{ より}$$

$$\frac{P_{cr}}{P_0} = \frac{n^2 - 1}{3} + \frac{k_f a^4}{3EI(n^2 - 1)} \quad (21)$$

式(21)が最小値をとる時の、 n の値は以下となる。

$$n = a \left(\frac{k_f}{EI} \right)^{1/4} \quad (22)$$

式(22)を式(21)に代入すると、

$$\frac{P_{cr}}{P_0} = \sqrt{\frac{k_f a}{E}} \left(\frac{16}{3} \left(\frac{a}{h} \right)^3 \right)^{1/2} \quad (23)$$

式(23)の両辺常用対数をとると、

$$\log_{10} \left(\frac{P_{cr}}{P_0} \right) = \frac{1}{2} \log_{10} \left(\frac{k_f a}{E} \right) + \log_{10} \left(\frac{16}{3} \left(\frac{a}{h} \right)^3 \right)^{1/2} \quad (24)$$

また、図-4 における、 $k_f = 0$ の時の座屈荷重式 P_0 は以下の通り。

$$P_0 = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \quad (25)$$

5. まとめ

本研究にて得られた知見、成果は以下の通りである。

(1)Winkler ばねにより弾性拘束された梁、円筒シェルの座屈荷重を計算した結果、Winkler ば

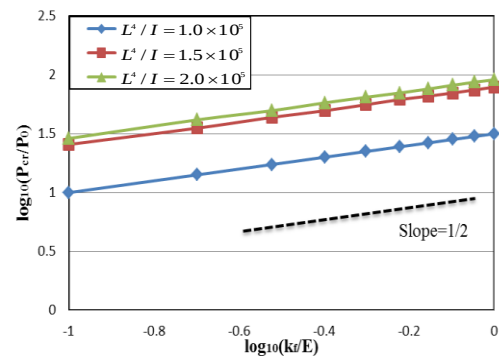


図-2 梁の剛性比に対する座屈荷重比

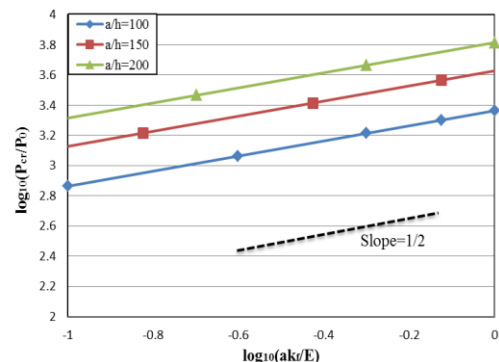


図-3 円筒シェルの剛性比に対する座屈荷重比

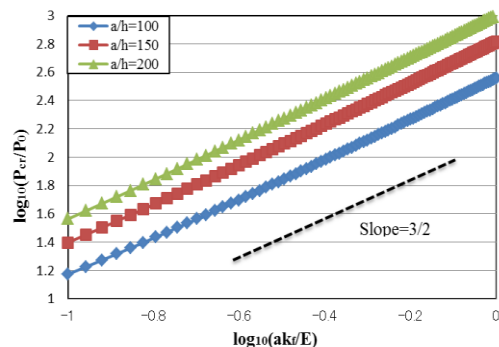


図-4 完全球シェルの剛性比に対する座屈荷重比

ね剛性に対し $1/2$ 乗のべき乗則に従うことがわかった。

(2)梁、円筒シェルに関するべき乗則を若干の式変形により解析的に導出した。

(3)Winkler ばねにより弾性拘束された完全球シェルはおおよそ $3/2$ 乗のべき乗則に従うことが確認された。

また、冒頭で挙げたその他の例においては、講演にて発表する。

参考文献

- 1) D.O.Bruth and B.O.Almroth: Buckling of Bars, Plates and Shells, McGraw-Hill, 1975.
- 2) Sato, M., Wadee, M.A., Sekizawa, M., Iiboshi, K. and Shima, H.: Buckling patterns of complete spherical shells filled with an elastic medium under external pressure, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol59, pp.22-30, 2012