混合ハイブリッド有限要素法による非定常移流分散解析に関する検討

大成建設株式会社　正会員○八木　啓介
大成建設株式会社　正会員　小野　誠
大成建設株式会社　正会員　鈴木　俊一

１．はじめに

放射性廃棄物処分等の埋設施設については, 複数のバリア材の使用や複雑な水理地質構造の存在が想定されており，安全評価の対象となる領域は不均質な透水性を有していると想定される[i)]．そのため，筆者らは不均質場への適用性が高く, 従来の手法よりも精度良く流速ベクトルが得られる手法として知られる混合ハイブリッド有限要素法[ii)]（以後，MHFEM とする）の放射性廃棄物処分に関連する諸問題への適用を検討している[iii)].

従来の放射性廃棄物処分の安全評価では，地下水流動解析から粒子追跡解析によって得られる，ある時刻の流跡線を移行経路とした核種移行解析が一般的[iv)]であるが，近年の計算技術の向上に伴い，非定常の多次元核種移行解析も現実的なものとなりつつある．同問題については，拡散項に MHFEM，移流項に不連続ガラーキン法[v)]をそれぞれ適用した Hoteit らの解法[vi)]が解析精度の面で優れているが，筆者らは解析コストの面で有利である MHFEM だけによる移流分散問題の解法を採用した．本検討では，MHFEM による移流分散問題の解法について示すと共に，その実用化に向けて実施した諸検討について示す.

２．ＭＨＦＥＭ形式の支配方程式

移流分散問題の支配方程式を式 1 に示す．なお，簡略化のため，媒体と流体の圧縮性および核種の崩壊については省略している．本検討ではこれを MHFEM で解くため，式 1 を拡散方程式の形状となるようにフラックス u を用いて式 2 のように書き直す.

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\mathbf{D}\nabla C - \vec{\mathbf{q}}C \right) = f \qquad \text{式 1}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathbf{u}} = f \qquad \text{ただし，} \vec{\mathbf{u}} = -\mathbf{D}\nabla C + \vec{\mathbf{q}}C \qquad \text{式 2}$$

ここで，C は溶存物質の濃度，D は分散係数，q は地下水流速，f は生成／消滅項を表す．さらに，式 2 の２式を重み関数 χ_h および φ_h を用いて MHFEM の形式で表すと以下のようになる．その際，新たな未知数として要素境界上の溶存物質の濃度として Λ を導入している.

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial C_h}{\partial t} \right) \cdot \varphi_h d\mathbf{x} + \int_\Omega \left(\nabla \cdot \vec{\mathbf{u}}_h \right) \cdot \varphi_h d\mathbf{x} = \int_\Omega f \cdot \varphi_h d\mathbf{x} \qquad \text{式 3}$$

$$\int_\Omega \left(\mathbf{D}^{-1} \vec{\mathbf{u}}_h \right) \cdot \chi_h d\mathbf{x} = \int_\Omega C_h \nabla \cdot \chi_h d\mathbf{x} - \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} \Lambda_h \mathbf{n}_K \cdot \chi_h d\mathbf{x} + \int_\Omega \left(\mathbf{D}^{-1} \vec{\mathbf{q}}_h C_h \right) \cdot \chi_h d\mathbf{x} \qquad \text{式 4}$$

ここで，Ω は有界領域，T_h は有限要素空間，K は任意の要素，∂K は要素境界，φ および χ は重み関数，下付き h は近似解であることを意味する.

３．２次元解析による検証

３．１　解析条件

MHFEM のみの解析手法の精度確認のため, 生成／消滅を無視した 2 次元移流分散問題を対象とした数値解析を実施した．この問題は I.Javandel ら[vii)]によって理論解が示されており，本検討では数値解と理論解との比較を濃度分布コンターにより行った。なお，解析条件を表 1に解析モデルを図 1にそれぞれ示す.

キーワード　混合ハイブリッド有限要素法，物質移行解析，非定常解析，数値振動

連絡先　〒163-6009 東京都新宿区西新宿 6-8-1 新宿オークタワー9 階　大成建設(株)原子力本部　yg-kis00@pub.taisei.co.jp

３．２　解析結果

10 年後の溶存物質の濃度分布について，理論解によるコンターを図 1 に，数値解によるコンターを図 2 にそれぞれ示す．数値解と理論解は概ね一致しており，MHFEM の非定常移流分散問題への適用性が示唆された．ただし，数値解の一部に数値振動によるものと想定される負の濃度が見られている．

４．数値振動の抑制手法

MHFEM における数値振動の抑制手法として，本検討では係数行列の集中化について示す．この場合の集中化とは，質量保存則における非定常に関する項をマトリクス型方程式の対角項に集約する手法である．同手法を適用して前述の数値計算を実施した結果を図 3に示す．集中化適用前の図 2では，移行フロント部において 10^{-5} オーダーの負の濃度が見られる（図 5参照）が，集中化適用後では数値振動による負の濃度の出現が抑制されることが確認された．

表 1　解析条件

媒体特性	流速	$V_x = 2\times10^{-8}$
	分散係数	$D_{diff} = 5\times10^{-9}$
境界条件	$C(0,y,t)=\begin{cases}1 & (-1\le y\le 1)\\ 0 & (y<-1 \ or\ 1<y)\end{cases}$	
初期条件	初期濃度	$C_0 = 0.$

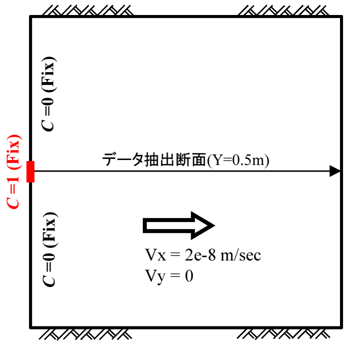

図 1　解析モデル

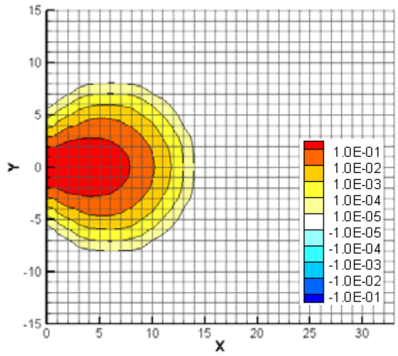

図 2　濃度分布（理論解）

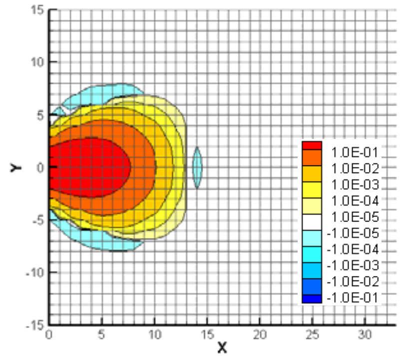

図 3　濃度分布（MHFEM）

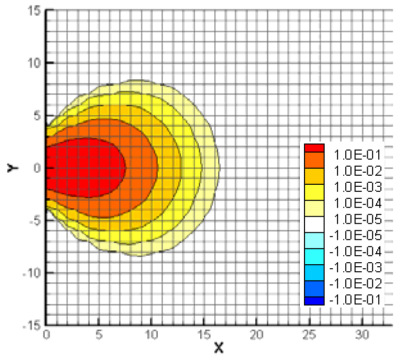

図 4　濃度分布（MHFEM 集中化）

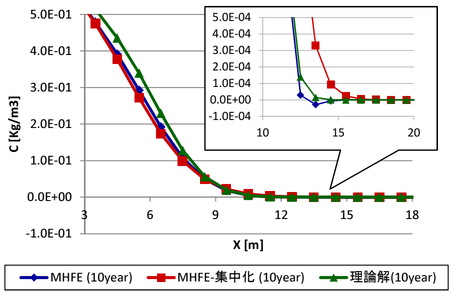

図 5　移行フロント付近の数値振動

５．まとめ

MHFEM による非定常移流分散方程式の解法を示し，2 次元非定常の移流分散問題への適用性を試解析によって検討した．その際，数値振動による負の濃度が生じることが確認されたが，全体剛性マトリクスに相当する連立方程式の係数行列の集中化によって対処可能であることを示した．今後は MHFEM の諸問題への適用を，計算の安定化と効率化を考慮しながら開発検討を進めていく予定である．

参考文献

i) 原子力安全委員会（2010）：余裕深度処分の管理期間終了以後における安全評価に関する考え方

ii) Arnold, D.N., and F.Brezzi（1985）: Mixed and nonconforming finite element methods: Implementation, post processing and error estimates, Math. Modell. Numer. Anal., 19, 7-32

iii) 八木ら(2012)：混合ハイブリッド有限要素法と不連続ガラーキン法を用いた密度依存流解析，土木学会第 67 回年次学術講演会 CS13-046

iv) 土木学会 エネルギー委員会 低レベル放射性廃棄物の余裕深度処分に関する研究小委員会（2008）：余裕深度処分の安全評価における地下水シナリオに用いる核種移行評価パラメータ設定の考え方

v) Cockburn, B(2001).:Devising Discontinuous Galerkin Methods for Non-Linear Hyperbolic Conservation Laws.J.Comput.Appl.Math.2001;128:187-204

vi) Hoteit, H., Ackerer, PH. and Mose R.（2004）: Nuclear waste disposal simulations : Couplex test cases, Computational Geosciences, Vol.8, pp.99-124

vii) I.Javandel.,C.Doughty.,and C.F.Tsang.(1984): Groundwater transport:Handbook of Mathemaical Models,pp.18-pp19,WATER RESOURCE MONOGRAH,AMERICAN GEOPHYSICAL UNION