圧縮性流体に対するコロケート格子を用いた陰的解法とその適用性

京都大学大学院工学研究科社会基盤工学専攻　学生会員　青木　一真
京都大学学術情報メディアセンター　正員　牛島　省
京都大学大学院工学研究科社会基盤工学専攻　学生会員　鳥生　大祐

1.　はじめに

本研究では，圧縮性流体を対象として，コロケート格子配置に基づく新たな数値解析手法を提案した．本手法では，陰的な計算アルゴリズムを利用して，基礎方程式系の計算を行うため，衝撃波などの不連続面を含む問題に対しても安定に計算を行うことが可能である．さらに，本手法では陽的解法と比較して，計算精度を維持したまま，計算時間を短縮することができる．

2.　基礎方程式

基礎方程式は，保存形の質量保存則 (1)，運動方程式 (2)，内部エネルギー式 (3)，状態方程式 (4) から構成される．内部エネルギー e は，定積比熱 C_v と温度 T を用いて，式 (5) のように表されるとする[2]．また，エネルギー式に含まれる熱流束 q_j は，次のフーリエの法則により式 (6) のように与えられるとする[1]．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho g \delta_{i2} \tag{2}$$

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho e u_j)}{\partial x_j} = -p\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \tag{3}$$

$$p = \rho e(\gamma - 1) \tag{4}$$

$$e = C_v T \tag{5}$$

$$q_j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \tag{6}$$

ここで，t は時間，x_j は三次元直交座標系の j 座標成分，u_i は x_i 方向の流速成分，$\rho, g, \tau_{ij}, p, e, q_j, \gamma, \kappa$ はそれぞれ密度，重力加速度，粘性応力，圧力，内部エネルギー，熱流束，比熱比，熱伝導率である．上記の基礎式を，有限体積法を用いてコロケート格子上で離散化する．非圧縮性流体解法である C-ISMAC 法[3]と同様の計算アルゴリズムを基礎式に適用することで，陰的な計算アルゴリズムに従い計算を進める．

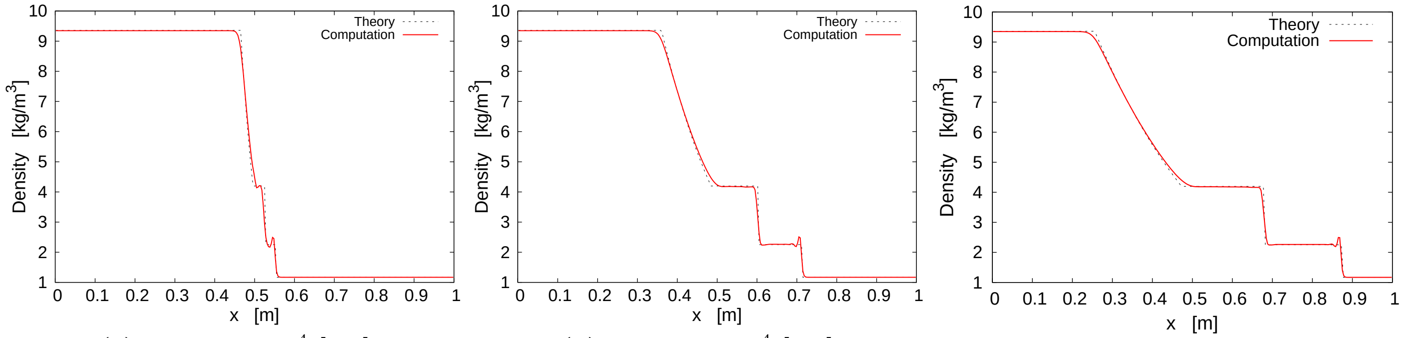
3.　数値解析手法の適用性

(1)　一次元衝撃波伝搬問題

提案した手法を用いて，一次元衝撃波伝搬問題を解いた．作動流体は理想気体に近似された非粘性の圧縮性流体であり，流体の物性値としては，空気の値を利用する．すなわち，比熱比 γ は 1.403，定積比熱 C_v は 7.17×10^2 [J=(kg·K)]，熱伝導率 κ は 2.62×10^2 [W=(m·K)] とした．初期条件として $x < 0.50$ [m] の高圧側に 300 [K]，8 [atm]，低圧側に 300 [K]， 1 [atm] の温度と圧力を与えた．また，流速は 0 [m/s] とし，密度は状態方程式から定めている．時間刻み Δt は，1.0×10^{-7} [sec] とした．**図–1** は，各実時間における密度分布について，計算結果および対応する理論解[4]を，それぞれ実線と点線で描いた．各実時間について，数値的な振動が見受けられる箇所もあるが，理論解[4]と良好に一致している．また，無次元化した質量の変化率の値は，計算中の全ての時刻にわたって，そのオーダーは 10^{-13} 程度と十分に小さく，保存性は高い精度で満たされていることが確認できた．次に，各時間刻みの計算時間 $cputime$ [sec] をケース 1，2 で比較した結果を，**図-2** に示す．**図-2** から，3 つの基礎式すべてに陰的解法を用いる場合には，時間刻みを大きく取ることが可能であるため，全体の計算時間を短縮することが可能であることが示された．

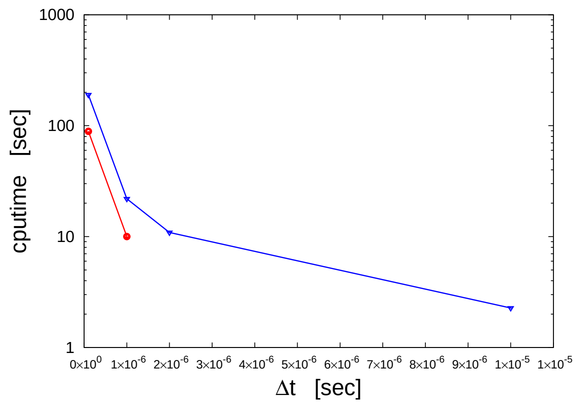
ケース 1 ：連続式のみを陰的に，運動方程式と内部エネルギー式を陽的に解く場合
ケース 2 ：3 つの基礎方程式すべてを陰的に解く場合

キーワード: コロケート格子，圧縮性流体，陰的解法
連絡先: 〒 615-8540 京都市西京区桂 Tel 075-753-7467



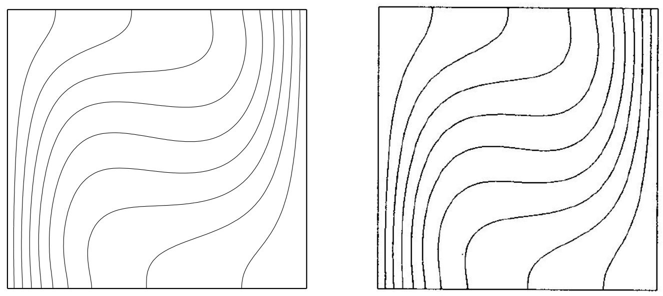
(a) $t = 1.0 \times 10^{-4}$ [sec] (b) $t = 4.0 \times 10^{-4}$ [sec] (c) $t = 7.0 \times 10^{-4}$ [sec]

図–1: 各実時間における計算結果と理論解[4)]



(ケース１が赤線, ケース２が青線)

図–2: 計算に要した時間の比較



温度の等高線 (本解法) 温度の等高線 (TCUP 法[5)])

図-3: キャビティ内自然対流の定常状態の比較

(2) キャビティ内自然対流

次に，一辺が 4.0×10^{-2}[m] の 2 次元正方形領域内で，自然対流の計算を行った．作動流体は理想気体に近似された粘性のある圧縮性流体であり，流体の物性値としては，温度が 283.15 [K] のときの空気の値を利用した．初期条件として，領域内で均一に温度は 283.15[K]，流速は 0 [m/s] とした．圧力は，重力加速度を考慮して分布を与えた．また，密度は状態方程式から定めている．上下壁面は断熱壁とし，左右壁面についてはそれぞれ $283.15 + \Delta T$[K]，283.15[K] として，左右に温度勾配 $\Delta T = 1.465$ [K] を与えた．時間刻み Δt は，1.0×10^{-6} [sec] とした．**図-3** に，定常状態における温度分布について，計算結果と参照解[5)]の比較を行ったものを示す．**図-3** から，計算結果は参照解[5)]と定性的に比較的よく一致することが確認できた．また，一次元衝撃波伝搬問題と同様に，本解法では基礎式が保存形で表されるため，計算領域内の質量保存則が高精度に満足されることも確認した．

4. おわりに

本研究では，圧縮性流体を対象として，提案した手法によって，一次元衝撃波伝搬問題と，キャビティ内の壁面加熱による自然対流現象を計算し，解法の妥当性について考察を加えた．今後の課題としては，数値振動の完全な抑制，解析手法の並列化による高速化，各種の圧縮性流体現象への適用と，それらの結果に対する，定量的な検証が挙げられる．

参考文献

1) 今井巧：流体力学，裳華房，1973
2) 永田雅人：高速流体力学，森北出版株式会社，2010
3) 牛島省，禰津家久：自由液面流れに対するコロケート格子を用いた陰的計算法 (C-ISMAC 法) の適用性，日本機械学会論文集 B 編，Vol. 68, pp. 3252-3258, 2002.
4) Sod, G. A.: A survey of several finite difference methods for systems of non-linear hyperbolic conservation laws, Computational Physics, pp. 1-31, 1978.
5) 姫野武洋, 渡辺紀徳：低重力環境における熱流体管理に関する研究, 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 69, pp. 266-273, 2003.