変分原理を用いた非ニュートン流体の３次元数値解析

京都大学　正会員　西藤　潤
京都大学　　　　　島越　貴之

1.　序論

コンクリート構造物の施行時の安全性向上や作業の効率化を実現するため，フレッシュコンクリートの流動解析の開発を行う．フレッシュコンクリートは非ニュートン流体として表現できるため，本研究では非ニュートン流体の数値解析手法を取り扱う．差分法では，自由表面を直接取り扱うことが難しいことから，本研究では自由表面のの計算を回避するために，Batty ら[1)]が提案した変分原理を使った定式化を用いる．２次元問題においては，西藤・小野[2)]らが，Batty らの定式化をニュートン流体から拡張し，2 次元解析を行った．本研究では，それを 3 次元問題に適用し，ビンガム流体，ダイラタント流体，シェアシニング流体の 3 種類で非ニュートン流体の解析を行う．

2.　流体場における支配方程式

支配方程式として，運動方程式，境界条件，流体の構成式を考える．運動方程式は次式で与えられる．

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{g} + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{1}$$

ここに，t は時間，ρ は密度，∇ は勾配ベクトル，$\boldsymbol{u}$ は速度ベクトル，$\boldsymbol{g}$ は重力加速度ベクトル，$\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソルである．自由表面の境界条件は，トラクションがゼロとなるトラクションフリーの条件を用いる．また，固体壁面の境界条件は，トラクションの壁面接面方向成分がゼロ，流体と壁面の相対速度の壁面法線方向がゼロとなるフリースリップ条件を用いる．流体の構成式は，ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}$ と凸関数 f の応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ に関する勾配により次式で表されるとする．

$$\dot{\varepsilon} = \nabla_{\boldsymbol{\sigma}}\, f\left(\sqrt{J_2}\right) \tag{2}$$

なお，$\sqrt{J_2}$ は偏差応力の第二不変量である．

3.　Paticle-in-Cell 法を用いた流動解析

(1)　支配方程式

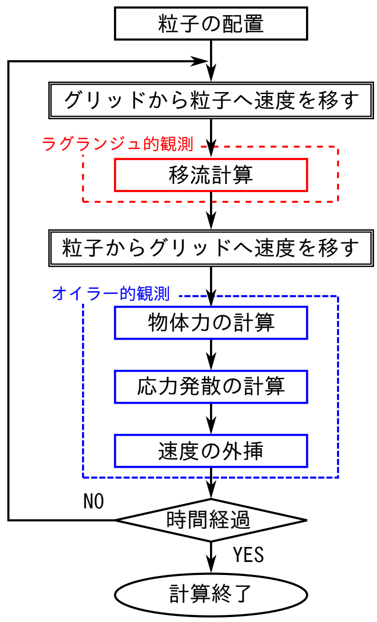
運動方程式 (1) を演算子分割し，以下のように分けて考える．

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -\boldsymbol{g} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{5}$$

式 (3) の移流計算は Particle-in-Cell 法 (PIC 法)[3)]を用て，ラグランジュ的観測で計算する．(4) の物体力計算と式 (5) の応力発散の計算についてはオイラー的観測により行う．計算の流れは図-1 の通りである．



図– 1: 計算のフローチャート

(2)　応力発散の計算

境界条件，構成式 (2)，応力発散の式 (5) と等価なミニマックス問題を定義する．まず，次式で I を定義する．

$$I = \frac{\rho}{2\Delta t}\int_D \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*\|^2 dV + \int_D \dot{\varepsilon}:\boldsymbol{\sigma}dV - \int_D f\left(\sqrt{J_2}\right)dV \tag{6}$$

ここに，D は流体領域である．この I を $\boldsymbol{u}$ に関して最小化し，$\boldsymbol{\sigma}$ に関して最大化する問題を考える．変分法を用いて，速度の変分，応力の変分をそれぞれとると，

Key Words: 変分原理, 非ニュートン流体, オイラー的観測
〒 615-8540 京都府京都市西京区京都大学桂 C

境界条件式，構成式 (2), 応力発散の式 (5) が得られる．数値解析では，式 (6) を離散化してから，ミニマックス問題として解く．式 (6) が体積積分のみからなる式であるので，離散化してから解くことで，境界を直接取り扱うことなく計算ができる．

4. 数値解析例

スランプ試験を模した解析を行う．図 2 に示すように，対称性を利用して，4 分の 1 を解析対象とする．解析領域は $0.5\mathrm{m}\times0.5\mathrm{m}\times0.5\mathrm{m}$ とし，セル数は $50\times50\times50$ とした．また，密度 ρ は $\rho=3000\mathrm{kg/m^3}$ とした．ビンガム流体の構成式は式 (2) において，関数 f を以下のようにおくことで表現できる．

$$f\left(\sqrt{J_2}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\bar{\mu}}\left(\sqrt{J_2}-\dfrac{Y}{\sqrt{3}}\right)^2 & \left(\sqrt{J_2}>\dfrac{Y}{\sqrt{3}}\right)\\ 0 & \left(\sqrt{J_2}\leq\dfrac{Y}{\sqrt{3}}\right)\end{cases} \tag{7}$$

同様に，ダイラタント流体・シェアシニング流体は次式で表される．

$$f\left(\sqrt{J_2}\right)=\frac{1}{2\bar{\mu}}\sqrt{J_2}^{\frac{1}{n}+1} \tag{8}$$

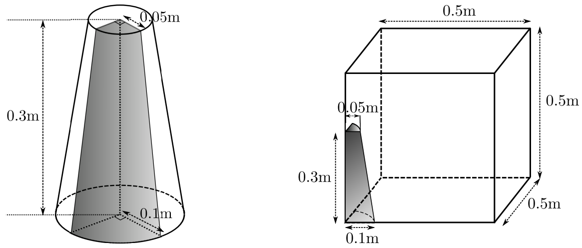
$\bar{\mu}$ は擬似粘性係数であり，Y は降伏応力である．$\bar{\mu}$ は全て $\bar{\mu}=1000\mathrm{kg/(m\cdot s)}$ とした．式 (7) において $Y=0$, あるいは式 (8) において $n=1$ とすると，ニュートン流体となる．解析結果を図-3–6 に示す．流体の違いによって流動の挙動が大きく異なっている様子が分かる．

5. 結論

非ニュートン流体の 3 次元数値解析のプログラムコードを開発した．また，開発したプログラムコードを用いて，ビンガム流体，ダイラント流体，シェアシニング流体の挙動を解析し，各流体の特性が表れていることを確認した．

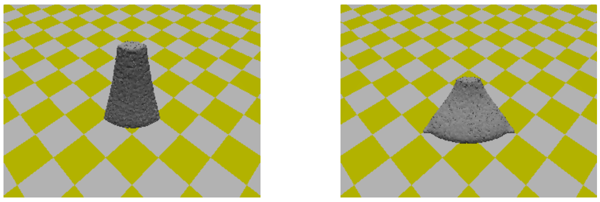
参考文献

1) Batty, C., Bertails, F. and Bridson, R.: *A fast variational framework for accurate solid-fluid coupling*, ACM Transactions on Graphics (TOG), Vol.26, No.3, pp.100-1–100-7, 2007
2) 西藤 潤, 小野 耕平 :自由表面を有する非ニュートン流体の数値計算に関する基礎的研究, 土木学会論文集 A2 分冊（応用力学）特集号, Vol.15, I.179–I.186, 2012
3) Harlow, F.H.: *The Particle-in-Cell Method for Numerical Solution of Problems in Fluid Dynamics*, Experimental Arithmetic, High-Speed Computations and Mathematics, pp.269–269, 1963



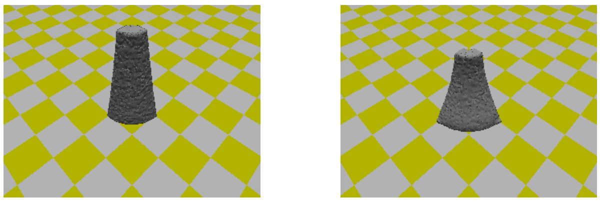
(a) モデル (b) 解析領域

図– 2: スランプ試験のモデルと解析領域



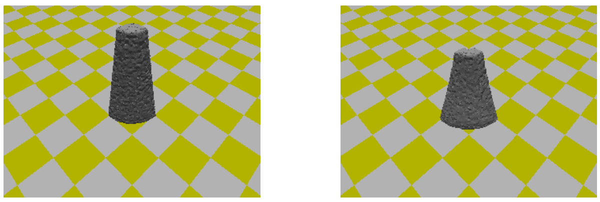
(a) $t=0.20\mathrm{s}$ (b) $t=0.80\mathrm{s}$

図– 3: ニュートン流体 ($Y=0\mathrm{kg/(ms^2)}$) の解析結果



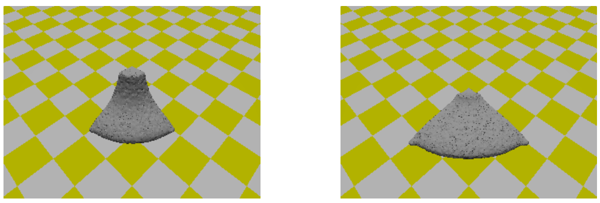
(a) $t=0.20\mathrm{s}$ (b) $t=0.80\mathrm{s}$

図– 4: ビンガム流体 ($Y=1000\mathrm{kg/(ms^2)}$) の解析結果



(a) $t=0.20\mathrm{s}$ (b) $t=0.80\mathrm{s}$

図– 5: ダイラタント流体 ($n=1.2$) の解析結果



(a) $t=0.20\mathrm{s}$ (b) $t=0.30\mathrm{s}$

図– 6: シェアシニング流体 ($n=0.8$) の解析結果：図 (b) は 0.80s ではなく 0.30s.