3次元流体-固体連成問題に対するCQ-BEM

○東京工業大学大学院　学生会員　丸山泰蔵
群馬大学大学院　正会員　斎藤隆泰
東京工業大学大学院　正会員　廣瀬壮一

1. はじめに

本研究では, 3 次元流体-固体連成問題に対する陰的 Runge-Kutta 法を用いた演算子積分時間領域境界要素法 (CQ-BEM)[1] について検討する.

3 次元流体-固体連成問題を時間領域境界要素法を用いて直接解析する場合, 流体-固体界面における境界条件に含まれる微分項をいかに適切に処理するかが重要となる. また, その場合, 波長の小さい領域に合わせて界面の要素長を設定する必要があり, 3 次元解析を行う場合は特に, 計算時間, 必要記憶容量の増大が懸念される. そのため, 著者らはこれまでに, 像空間で境界条件, 及び境界物理量を処理する手法 [2] を提案してきたが, 非線形問題への適用ができないことが課題となっていた.

そこで, 本研究では CQ-BEM の特性を活かして境界条件に含まれる微分項を処理し, 時間領域直接解析を行う手法を提案する. さらに高速多重極法の適用を行うことで, 計算の効率化を図る. 数値解析例として, 流体-固体界面による平面波の反射・透過問題を解析することで, 本手法の妥当性を確認する.

2. 解析モデル

本研究では, 図 1 のような流体領域 Ω^f, 固体領域 Ω^s の連成問題を考える. このとき, 入射波は流体領域 Ω^f から入射し, 界面 S で反射・透過される問題とする. 今, 流体領域 Ω^f, 及び固体領域 Ω^s のそれぞれに対して, 圧力 p, 及び変位 $\boldsymbol{u}$ が満足する支配方程式を次に示す.

$$c_f^2\nabla^2 p(\boldsymbol{x},t)=\ddot{p}(\boldsymbol{x},t),\quad \boldsymbol{x}\in\Omega^f \tag{1}$$

$$c_T^2\nabla^2\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)+(c_L^2-c_T^2)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\ddot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t),\quad \boldsymbol{x}\in\Omega^s \tag{2}$$

ここで, t は時刻, $\dot{(\ )}$ は時間微分を表している. また, c_f は Ω^f 中を伝搬する波動の速度, c_L, c_T は Ω^s 中での縦波, 横波の波速を表している.

3. 時間領域境界積分方程式

支配方程式 (1), (2) に対する流体領域 Ω^f, 及び固体領域 Ω^s における積分方程式を導き, 界面 S に対して極限操作を行い, 時間領域境界積分方程式を導出し, 界面 S における境界条件 $-\rho_f\boldsymbol{n}^f\cdot\ddot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{n}^f\cdot\nabla p, \boldsymbol{n}^s\cdot\boldsymbol{t}=-p, \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{t}=0$ ($\boldsymbol{t}$ は表面力, $\boldsymbol{n}^\varphi(\varphi=f \text{ or } s)$ は流体領域, 固体領域それぞれの領域に対して定義している外向き法線方向ベクトル, $\boldsymbol{s}$ は接線方向ベクトル, ρ_f は流体の密度) を代入すると, 次のようになる.

$$-C(\boldsymbol{x})t_\eta(\boldsymbol{x},t)=p^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},t)+\fint_S H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)*t_\eta(\boldsymbol{y},t)dS_y$$
$$-\rho_f\int_S G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)*\left\{\boldsymbol{n}^f(\boldsymbol{y})\cdot\ddot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{y},t)\right\}dS_y \tag{3}$$

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\int_S\{\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\boldsymbol{n}^s(\boldsymbol{y})\}*t_\eta(\boldsymbol{y},t)dS_y$$
$$-\fint_S\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)*\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y},t)dS_y \tag{4}$$

ここで, $C(\boldsymbol{x})$ 及び, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$ は点 $\boldsymbol{x}$ における境界形状に依存する自由項であり, $*$ は時間に関する畳込み積分, $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$, $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ は 3 次元スカラー波動問題における基本解, 及び二重層核, $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t), \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ は 3 次元弾性波動問題における基本解と二重層核であり, p^{in} は入射波の圧力を表している. また, 積分記号 $\fint$ は Cauchy の主値の意味で評価することを表している. t_η は表面力の法線方向成分であり,

$$t_\eta(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{n}^s(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},t) \tag{5}$$

と表される. 式 (3) は変位の時間に関する二階微分項 $\ddot{\boldsymbol{u}}$ を含むため, 式 (3), (4) を連成して解くならば, 何らかの処理が必要となる. そこで, 本研究では, CQ-BEM の影響関数の特性を用いた処理を行う.

4. 演算子積分法を用いた離散化

まず, 式 (3) に含まれる変位の時間に関する二階微分項 $\ddot{\boldsymbol{u}}$ の処理方法を示す. 畳込み積分の性質, 及び波動伝搬問題に対する静止過去の条件 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0)=\dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{0}$ を考慮すると, 式 (3) の右辺第三項は次のように変形できる.

$$-\rho_f\int_S G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)*\left\{\boldsymbol{n}^f(\boldsymbol{y})\cdot\ddot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{y},t)\right\}dS_y$$
$$=-\rho_f\int_S\ddot{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)*\left\{\boldsymbol{n}^f(\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y},t)\right\}dS_y \tag{6}$$

次に, 式 (6) を用い, 境界積分方程式 (3), (4) について, 境界 S を M 個の一定要素に分割し, 陰的 Runge-Kutta 法を用

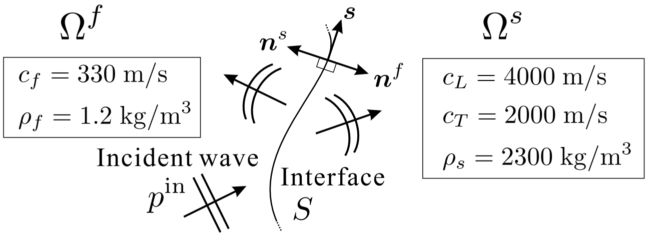

図 1 3 次元流体-固体連成問題に対する解析モデル

Key Words: 演算子積分法, 時間領域境界要素法, 流体-固体連成問題
〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1-W8-22・TEL/FAX: 03-5734-3587

いた演算子積分法 (CQM) により時間 t を時間増分 Δt を用いて N ステップに分割すると, 第 n ステップにおける流体領域, 及び固体領域に対する離散化された境界積分方程式 (3), (4) はそれぞれ次のように表せる.

$$-C(\boldsymbol{x})t_\eta(\boldsymbol{x},(n+c_i)\Delta t)=p^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},(n+c_i)\Delta t)$$
$$-\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Big[\tilde{A}_\alpha^{ij;n-k}(\boldsymbol{x})\left\{\boldsymbol{n}_\alpha^f\cdot\boldsymbol{u}_\alpha((n+c_j)\Delta t)\right\}$$
$$-B_\alpha^{ij;n-k}(\boldsymbol{x})t_{\eta;\alpha}((n+c_j)\Delta t)\Big] \tag{7}$$

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},(n+c_i)\Delta t)$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Big[\left\{\boldsymbol{Q}_\alpha^{ij;n-k}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}_\alpha^s\right\}t_{\eta;\alpha}((n+c_j)\Delta t)$$
$$-\boldsymbol{R}_\alpha^{ij;n-k}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_\alpha((n+c_j)\Delta t)\Big] \tag{8}$$
$$(i=1,...,m),\qquad (n=0,...,N-1)$$

ここで, $\tilde{A}_\alpha^{ij;\kappa}$, $B_\alpha^{ij;\kappa}$, 及び $\boldsymbol{Q}_\alpha^{ij;\kappa}$, $\boldsymbol{R}_\alpha^{ij;\kappa}$ はそれぞれ流体領域, 及び固体領域の影響関数であり, α はソース点を示す要素番号, m は用いる陰的 Runge-Kutta 法の段数である. このとき, $\tilde{A}_\alpha^{ij;\kappa}$ は式 (6) より, 基本解の時間に関する二階微分項 $\ddot{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ に対応しており, CQM の特性によって次のように表される.

$$\tilde{A}_\alpha^{ij;\kappa}(\boldsymbol{x})=\left(\tilde{\mathbf{A}}_\alpha^{\kappa}(\boldsymbol{x})\right)_{ij} \tag{9}$$
$$\tilde{\mathbf{A}}_\alpha^{\kappa}(\boldsymbol{x})=\mathcal{F}_l^{\kappa}\left[\sum_{\beta=1}^{m}\left(\lambda_\beta^l\right)^2\int_{S_\alpha}\hat{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda_\beta^l)dS_y\boldsymbol{E}_\beta(\zeta_l)\right] \tag{10}$$

ここで, 記号 $\mathcal{F}_l^{\kappa}$ は次で定義される Fourier 変換である.

$$\mathcal{F}_l^{\kappa}[\phi_l]=\frac{\mathcal{R}^{-\kappa}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}[\phi_l]\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}\kappa l}{L}} \tag{11}$$

一方, i は虚数単位, $m\times m$ 行列 $\boldsymbol{E}_\beta$, ζ_l, λ_β^l, L, $\mathcal{R}$ は陰的 Runge-Kutta 法を用いた CQM のパラメータであり, 用いる陰的 Runge-Kutta 法の係数パラメータや必要な精度, 及び総時間ステップ数などから決定される [1]. また, 式 (11) は $L=N$ とすることで, FFT を用いて高速に計算を行うことができる. 式 (10) 中の $\hat{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},s)$ は 3 次元スカラー波動問題に対する Laplace 変換領域基本解である. 一方, 式 (7), (8) 中の影響関数 $B_\alpha^{ij;\kappa}$, $\boldsymbol{Q}_\alpha^{ij;\kappa}$, $\boldsymbol{R}_\alpha^{ij;\kappa}$ はそれぞれ対応する基本解, 二重層核の Laplace 変換を用いて表現される [1].

本論文では, 高速多重極法の適用方法を紙面の都合上, 省略する. 高速多重極法のアルゴリズムに関しては, 文献 [3], CQ-BEM への適用方法は文献 [4] 等を参照されたい.

5. 計算精度の確認

本研究における提案手法の精度確認を行う. 図 2 の右上に示すように, 平面圧力波を界面へ垂直入射させたときの流体側での反射圧力, 及び固体側での透過変位の計算を行った. 入射圧力波には次に示す正弦波 1 波を用いた.

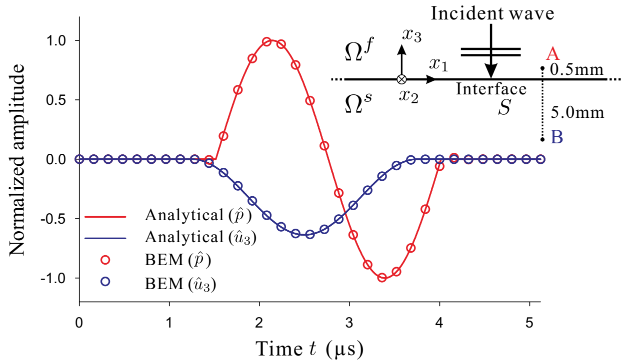

図 2 流体-固体二層モデルへの平面波入射による反射圧力, 及び透過変位

$$p^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},t)=\begin{cases}p_0\sin\theta^{\mathrm{in}} & (0\le\theta^{\mathrm{in}}\le 2\pi)\\ 0 & (\mathrm{otherwise})\end{cases} \tag{12}$$
$$\theta^{\mathrm{in}}=2\pi\left(t+c_f x_3\right)/T \tag{13}$$

ここで, p_0 は入射圧力波の振幅, T は入射波の周期を表しており, 本精度確認では $T=2.5\mu$s とした. ただし, 時刻 $t=0.0\mu$s に平面圧力波が界面に到達するようにしている. また, 材料定数は各領域で大きく異なる図 1 中の値を用い, 界面の境界要素は解析時間に対して十分な広さで打ち切っている.

図 2 はその右上図に示すように垂直上方 0.5mm の点における無次元化された反射圧力 $\hat{p}(=p/p_0)$, 及び境界面から下方 5.0mm の点における無次元化された透過変位 $\hat{u}_3(=u_3\rho_s c_L/(p_0 T)$, ρ_s は固体の密度) を示している. 図 2 中の記号は本手法によって得られた反射圧力, 透過変位をプロットしている. 平面圧力波を界面に入射した場合の透過変位, 及び反射圧力は音響インピーダンスから解析的に求めることができる. 比較のため, それらを実線で示している. 図 2 より, 解析は安定しており, 両者は良く一致していることが確認できる.

6. 結論

3 次元流体-固体連成問題に対する CQ-BEM の開発を行った. 平面圧力波入射による精度確認では, 材料定数が大きく異なる二領域連成問題を安定に精度良く解析できることが確認できた. なお, 当日は, 探触子からの放射場をより現実的に表現した場合の解析結果などについても発表する予定である.

参考文献

1) 丸山泰蔵・斎藤隆泰・廣瀬壮一: 陰的 Runge-Kutta 法を用いた演算子積分時間領域境界要素法及び 3 次元スカラー波動問題への応用, 計算数理工学論文集, JASCOME, vol.12, pp.91-96, 2012.
2) 丸山泰蔵・斎藤隆泰・廣瀬壮一: 改良型 CQ-BEM を用いた空気超音波法の 3 次元数値シミュレーション, 第 62 回理論応用力学講演会 2013 講演論文集, 2013, (USB メモリ収録).
3) L. Greengard and V. Rokhlin: A fast algorithm for particle simulations, *J. Comput. Phys.*, vol.73, pp.325-348, 1987.
4) 福井卓雄・斎藤隆泰: Lubich の演算子積分法における高速多重極法, 日本シミュレーション学会論文誌, 小特集: 境界要素法の新展開, vol.28, pp.17-22, 2009.