軸対称多層弾性構造に対する波動伝播解析の体積ひずみを用いた理論解の誘導

独立行政法人　土木研究所　　正会員　○川名　太，久保　和幸
東京電機大学　フェロー会員　松井邦人

１．目的

舗装の非破壊調査法として，広く活用されているFWD試験は，舗装に衝撃的な荷重を載荷する試験である．FWD試験では，たわみの最大値に注目して舗装の構造評価を行うことが一般的であるが，その動的応答を調査することで，構造の特性や損傷の状況をより詳細に把握することが可能となる．

舗装の構造解析では，一般に舗装を静的な円形等分布荷重が表面に作用する多層弾性構造としてモデル化し，変位関数や応力関数などを用いて変位や応力を表し，Hankel 変換を適用して理論解を誘導する手法が用いられている．著者らは，この種の問題に対して，より合理的に理論解を誘導する方法として，物理的な意味の明確な体積ひずみを用いた解法を試みている[1]．本稿では，衝撃荷重に対する舗装の動的応答を評価するために，上記の理論解を動的問題へと拡張し，例題を用いて本理論解が既往の解析プログラム[2]の結果とよく一致することを示している．

２．体積ひずみを用いた理論解の誘導

円柱座標系(r,θ,z)における応力σの平衡方程式は，

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \tag{1a}$$

$$\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}=\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \tag{1b}$$

で与えられる．ここで，ρは密度，tは時間である．応力σと変位uの関係は，以下の通りである．

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \sigma_z\\ \tau_{rz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0\\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0\\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mu\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\partial u_r/\partial r\\ u_r/r\\ \partial u_z/\partial z\\ \partial u_z/\partial r+\partial u_r/\partial z\end{Bmatrix}$$
$$+\eta\begin{bmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0\\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0\\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mu\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\partial \dot{u}_r/\partial r\\ \dot{u}_r/r\\ \partial \dot{u}_z/\partial z\\ \partial \dot{u}_z/\partial r+\partial \dot{u}_r/\partial z\end{Bmatrix} \tag{2}$$

ここで，λおよびμはラメ定数である．また，ηは減衰定数，・は時間での微分を表す．体積ひずみΔは，

$$\Delta=\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{3}$$

である．境界条件は，$z=\infty$で，すべての応答をゼロとし，舗装表面で，載荷による接地圧分布を与える．

式(2)の関係を式(1)に代入し，式(3)を用いて整理すると以下の式が得られる．

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial r}+\mu\nabla_1^2 u_r+\eta(\lambda+\mu)\frac{\partial\dot{\Delta}}{\partial r}+\eta\mu\nabla_1^2\dot{u}_r=\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \tag{5}$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z}+\mu\nabla_0^2 u_z+\eta(\lambda+\mu)\frac{\partial\dot{\Delta}}{\partial z}+\eta\mu\nabla_0^2\dot{u}_z=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \tag{6}$$

ここで，$\nabla_v{}^2$は，軸対称のラプラス演算子である．

式(5)および(6)より，

$$\nabla_0^2\Delta+\eta\nabla_0^2\dot{\Delta}=\frac{1}{V_P^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta \tag{7a}$$

$$V_P=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \tag{7b}$$

を得る．式(7a)をFourier変換し，その結果をHankel変換すると，

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-\xi^2+\frac{\omega^2}{V_P{}^2(1+i\omega\eta)}\right)\hat{\tilde{\Delta}}_0=0 \tag{8}$$

$\hat{\tilde{\Delta}}_0$は，体積ひずみΔの Fourier 変換$\tilde{\Delta}$に関する 0 次の Hankel 変換である．式(8)の解は，以下の通りとなる．

$$\hat{\tilde{\Delta}}_0=Ae^{\alpha z}+Be^{-\alpha z} \tag{9}$$

ここで，AおよびBは，積分定数である．

式(5)および式(6)を Fourier 変換し，それを Hankel 変換して，式(3)を用いて整理すると，

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-\xi^2+\frac{\omega^2}{V_S^2(1+i\omega\eta)}\right)\hat{\tilde{u}}_{r1}=\xi\frac{\lambda+\mu}{\mu}\hat{\tilde{\Delta}}_0 \tag{10a}$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-\xi^2+\frac{\omega^2}{V_S^2(1+i\omega\eta)}\right)\hat{\tilde{u}}_{z0}=-\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial\hat{\tilde{\Delta}}_0}{\partial z} \tag{10b}$$

$$V_S=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{10c}$$

キーワード　多層弾性理論，体積ひずみ，波動伝播解析，舗装構造評価

連絡先　〒305-8516 つくば市南原 1-6　(独)土木研究所 道路技術研究グループ舗装チーム TEL 029-879-6789

また，σ_z と τ_{rz} を各々Fourier 変換し，Hankel 変換すると，

$$\hat{\hat{\sigma}}_{z0} = \lambda\xi(1+i\eta\omega)\hat{\hat{u}}_{r1} + (\lambda+2\mu)(1+i\eta\omega)\frac{\partial\hat{\hat{u}}_{z0}}{\partial z} \tag{11a}$$

$$\hat{\hat{\tau}}_{rz1} = \mu(1+i\eta\omega)\left(-\xi\hat{\hat{u}}_{z0} + \frac{\partial\hat{\hat{u}}_{r1}}{\partial z}\right) \tag{11b}$$

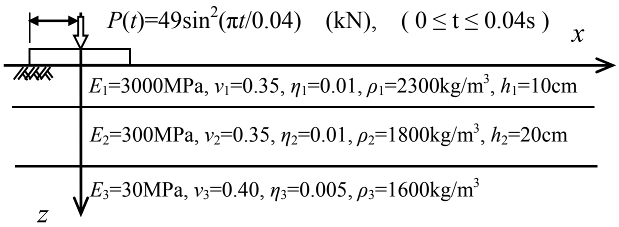
式(10)の解を式(9)を用いて整理し，これを式(11)に代入することで，Fourier 変換した変位uおよび応力σの各成分の Hankel 変換値が，境界条件によって決定される積分定数を用いて算定できることになる．これを Hankel 逆変換し，その結果を Fourier 逆変換することで着目点での変位および応力を得る．

3．例題

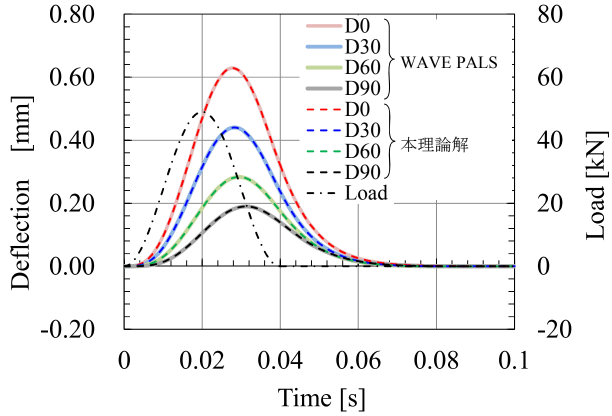
図−1 に示す 3 層弾性体の表面に動的な荷重が作用するものとする．なお，載荷波形は，周期 T=0.04s のハーバーサイン波で与え，ピーク荷重を 49kN，載荷半径を 15cm とした．図−2 に，等分布荷重を仮定して，地表面のたわみを算定した結果を示す．D_0，D_{30}，D_{60} および D_{90} は，載荷板中心から 0，30，60 および 90cm の位置のたわみを表している．図中には，計算精度が確認されている既往の解析プログラム Wave PALS[2]による計算結果を併記しており，本研究で得られた理論解は，それとよく一致していることが分かる．図−3 は，等分布，パラボリック分布およびインバースパラボリック分布の接地圧分布を仮定して，載荷板直下の地表面のたわみと 1 層目下面の水平方向のひずみを算定した結果である．図中には，静的解析の結果も示している．FWD 試験のような衝撃荷重に対する応答のピーク値は，静的解析の応答よりもかなり小さい．また，地表面付近のひずみは，接地圧分布の影響を大きく受けていることが分かる．

4．まとめ

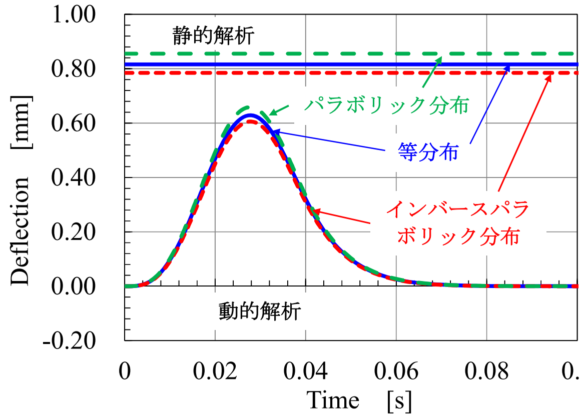
多層弾性構造における変位および応力の動的荷重に対する理論解を体積ひずみを用いて誘導し，既存の解析プログラムとの比較を行って，解の妥当性を検証した．今後は，本理論解を組み込んだ FWD 試験データの動的逆解析手法の提案を行う予定である．



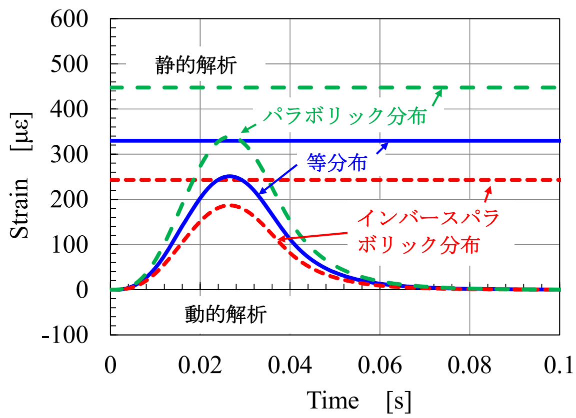
図−1 計算モデル



図−2 既往の解析プログラムとの比較



(a)地表面のたわみ



(b)1 層目下面の水平方向のひずみ

図−3 計算結果

参考文献

1)川名太，松井邦人：体積ひずみを用いた軸対称分布荷重を受ける多層弾性構造の理論解，土木学会論文集 E1（舗装工学），Vol.68，No.3，pp.I-21－I-28

2)小澤良明，松井邦人：フォークトモデルで構成された舗装構造の波動伝播解析，土木学会論文集 E，Vol.64，No.2，pp.314-322