3次元格子バネ解析法におけるモデル定数と弾性定数の関連付けに関する研究

鳥取大学大学院　学生会員　○上田　洋，栢野　伸也
鳥取大学大学院　　正会員　　西村　強，河野　勝宣
大成建設（株）　　正会員　　文村　賢一

1. はじめに

個別要素法などの粒状体解析において，要素間バネ定数などの入力値の決定は，最も重要な課題である．これらの定数と集合体の巨視的な材料定数との理論的な対応関係は依然確立されておらず，経験的または「キャリブレーションプロセス」などと呼称される手順で試行錯誤的に求められている例が多い[1]．本研究では，超弾性構成則[2]を用いて，質点連結格子系を用いてバネ係数と弾性定数の関係式を誘導した．算出したバネ係数値を用いた圧縮解析による弾性定数と元の弾性定数と比較した．

2. 粒状体解析法の微視的係数の決定法

図−1(a)に示すように，連続体を実線で示す格子で分割して，格子点を質点として運動方程式を立てて，質点の変位による格子のゆがみによって連続体の変形を表す．これらの質点間の作用力の算定に際して，**図−1**(b)に示すバネによる連結状態を導入する．なお，同図での粘性ダッシュポットηは，静的安定状態にするために導入している．載荷によりひずみ e_{ij} と応力σ_{ij} の状態にあるとき，重心位置 x_i にある粒子 p の変位を次のように仮定する．

$$u_i^p = e_{ij} x_j^p \tag{1}$$

質点間の法線，接線方向の相対変位（$u_{(n)}$，$u_{(s)}$），力（$f_{(n)}$，$f_{(s)}$）を次式で与える．

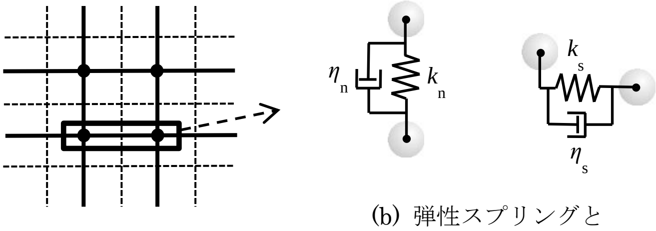
$$f_{(n)} = k_n u_{(n)},\quad f_{(s)} = k_s u_{(s)} \tag{2}$$

法線，接線方向の相対変位を次式のように書く．

$$u_{(n)}^m = \Delta u_i^m I_i^m \quad (3) \qquad u_{(s)i}^m = \Delta u_i^m - u_{(n)}^m I_i^m \quad (4)$$

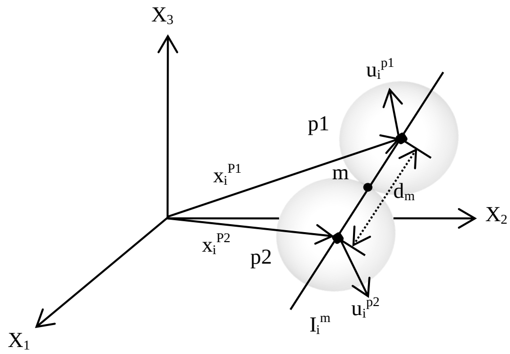
このとき，相対変位 Δu_i^m は次式となる．

$$\Delta u_i^m = u_i^{p1} - u_i^{p2} = e_{ij}\left(x_j^{p1} - x_j^{p2}\right) = e_{ij} d_m I_j^m \tag{5}$$



(a) 質点配置　(b) 弾性スプリングと粘性ダッシュポット

図−1　格子モデルの概略



図−2　粒状体モデル

ここに，I_i^m は法線方向の単位ベクトルである．

$$I_i^m = \frac{x_i^{p1} - x_i^{p2}}{d_m} \tag{6}$$

d_m は，**図−2** に示す p1 と p2 間のバネの長さである．連結点 m で格子間力 f_i は次式で求める．

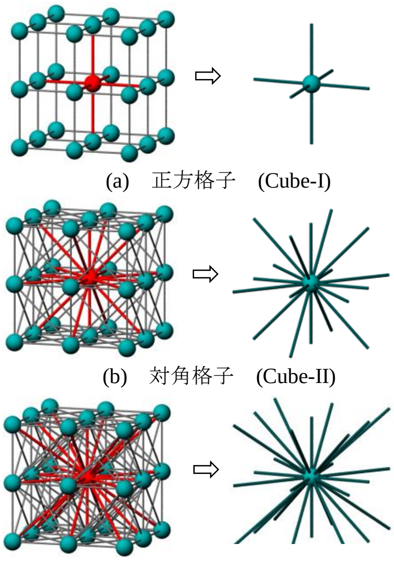
$$f_i^m = \left(k_n^m - k_s^m\right)\left(e_{kl} I_k^m I_l^m\right) I_i^m d_m + k_s^m e_{ij} I_j^m d_m \tag{7}$$

式(7)中のダミー添字の i, j, k, l について，総和規約が適用される．N_c をバネの総数として，単位体積当たりのひずみエネルギーΠを次式で表す．

$$\Pi = \frac{\Pi_b}{V} = \frac{1}{V}\sum_{m=1}^{N_c}\frac{1}{2}\left(e_{ij} d_m I_j^m f_j^m + e_{ji} d_m I_i^m f_i^m\right) \tag{8}$$

応力σ_{ij} は，

キーワード：質点連結格子モデル，バネ係数，弾性則
連絡先：680-8552　鳥取市湖山町南 4-101　鳥取大学大学院工学研究科（tnishi@cv.tottori-u.ac.jp）



(a)　正方格子　(Cube-I)

(b)　対角格子　(Cube-II)

(c)　対角格子　(Cube-III)

図−3　質点連結格子モデル

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial \Pi}{\partial e_{ij}}=\frac{1}{2V}\sum_{m=1}^{N_c}\left(d_m I_i^m f_j^m + d_m I_j^m f_i^m\right) \tag{9}$$

となる．式(9)に式(7)を代入することにより，次のように書くことができる．

$$\sigma_{ij}=\frac{1}{V}\sum_{m=1}^{N_c}\left[\frac{1}{2}\left(k_s^m e_{jl} I_l^m I_i^m d_m^{\,2}+k_s^m e_{il} I_l^m I_j^m d_m^{\,2}\right)+\left(k_n^m-k_s^m\right)e_{kl} I_i^m I_j^m I_k^m I_l^m d_m^{\,2}\right] \tag{10}$$

弾性係数テンソル C_{ijkl} は，

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}e_{kl} \tag{11}$$

と表現できることから，C_{ijkl} は次式で求められる．

$$C_{ijkl}=\frac{1}{V}\sum_{m=1}^{N_c}\left[\frac{k_s^m d_m^{\,2}}{4}\left(I_j^m I_k^m \delta_{il}+I_i^m I_k^m \delta_{jl}+I_j^m I_l^m \delta_{ik}+I_i^m I_l^m \delta_{jk}\right)+\left(k_n^m-k_s^m\right)d_m^{\,2} I_i^m I_j^m I_k^m I_l^m\right] \tag{12}$$

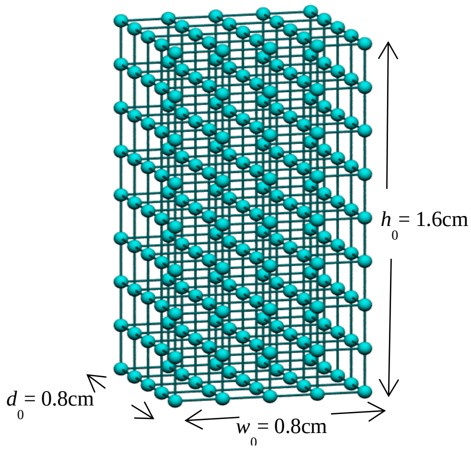
ここに，δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．

3.　質点連結格子モデルによる一軸圧縮解析

別途実施した石膏供試体の圧縮試験結果[3]より，ヤング率E = 1112 MPa，ポアソン比ν = 0.18を得た．この結果に対して，**図−3**に示す3種の質点連結格子モデルを用いて，算出バネ係数値よる一軸圧縮解析を行う．ここでは，一例としてCube-Iによるモデルを**図−4**に示す．質点数は225個であり，d_m=0.2cmである．式(12)を用いてk_n，k_sは次式となる．

$$k_n=\frac{1}{2\alpha_1}\cdot(\lambda+2\mu)=\frac{1}{2\alpha_1}\cdot\frac{E}{1+\nu} \tag{13}$$

$$k_s=\frac{1}{2\alpha_1}\cdot\frac{E}{1+\nu} \tag{14}$$



図−4　一軸圧縮解析モデル

表−1　接触バネ係数の算出値

	Cube-I	Cube-II	Cube-III
法線方向バネ係数 k_n (kN/m)	942	348	159
接線方向バネ係数 k_s (kN/m)	942	83	46

表−2　一軸圧縮解析による結果

	Cube-I	Cube−II	Cube−III
ヤング率 E (MPa)	736	750	487
ポアソン比 ν	0	0.190	0.232

ここで，$\alpha_1 = d_m^{\,2}/V$ である．**表−1** は，式(13)によるバネ係数値の算出結果，**表−2** は一軸圧縮解析から求めた E，νである．解析条件は，時間増分Δt = 1.0×10^{-7}sec，縦方向(h)の圧縮変位増分Δu=1.0×10^{-8}cm とした．その結果，E については，Cube-I，Cube-II は約 70%で，Cube-III に関しては，約 50%の値となっている．また，νについては，Cube-II において同程度の値を再現することができている．なお，正方格子 Cube-I では，質点にバネが斜方向に配置されていないため，縦方向(h)に圧縮変位を与えても，それに対する直交方向(d,w)に変位は生じない．従って，ν=0 となる．**表−2** の結果は満足できる段階にないが，基本的な定式化は成されたと考えている．

参考文献：1）例えば, Potyondy D. O & Cundall P. A. : International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol.41, No.8, 2004．2）京谷孝史：よくわかる連続体力学ノート，2008．3）西村他：第 13 回岩の力学国内シンポジウム講演論文集，2013.