Material Point Method（MPM）におけるエネルギー変動問題とその抑制法

琉球大学大学院　学生員　○江戸　孝昭
琉球大学　正会員　松原　仁
琉球大学　正会員　原　久夫

１．目的

近年，集中豪雨の突発的な発生に伴い，地盤・岩盤の斜面崩壊（崩落）が生じ，多くの人的被害が生じている．斜面崩壊に関して，これまで数値解析的アプローチでは，FEM や FDM を用いて評価されてきたが，上記の手法においては土塊の移動現象の再現が困難であった．最近では，粒子法と呼ばれるメッシュ生成を必要としない手法が様々な分野で盛んに行われており，地盤・岩盤の大変形問題にも適用され，斜面崩壊現象の再現が行われている．

その粒子法の一つに Material Point Method（MPM）と呼ばれる手法がある．MPM は SPH や MPS 等の粒子法と同様に連続体を粒子で表現するが，他の粒子法と異なり Euler 格子を用いて支配方程式を解く手法である．また，MPM は FEM をベースとした解析手法であるため，他の粒子法より理解しやすい手法であるとされているが，弾性解析においてエネルギーに関する問題が指摘されている．そこで本研究では，MPM のエネルギー変動問題に対する抑制法を提案する．

２．MPM の概要

２．１支配方程式

MPM は連続体を粒子の集合体で表わし，その粒子群の背面に Euler 格子を設け（Fig.1 参照），各粒子の物理量を有限要素（FEM）同様に格子節点の内挿関数を用いて節点に集約し，Euler 格子にて支配方程式を解く手法である．このとき，連続体における質量および運動量の保存則は次式にて得られる．

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{1a}$$

$$\rho\,\mathbf{a} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho\,\mathbf{b} \tag{1b}$$

ここで，ρ：密度，$\mathbf{v}$：速度，$\mathbf{a}$：加速度，$\boldsymbol{\sigma}$：応力，$\mathbf{b}$：単位体積力である．なお，支配方程式の弱形式化，離散化に関しては参考文献1)を参照されたい．

２．２アルゴリズム

本研究では，MUSL(Modified Update Stress Last)[1]を採用し，Fig.2 に MPM のアルゴリズムの概念図を示す． MUSL では，まず節点の内挿関数を用いて，k ステップにおける節点質量を求める．

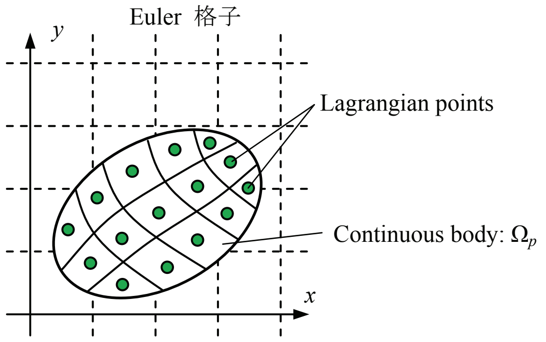
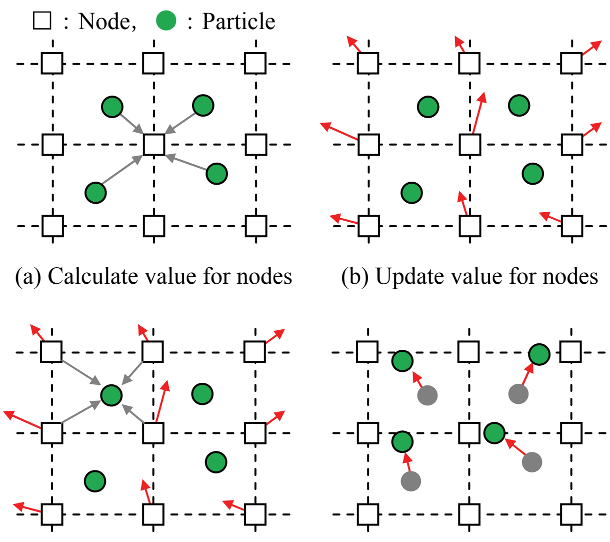


Fig.1 Concept of MPM



(a) Calculate value for nodes　(b) Update value for nodes

(c) Calculate value for particles　(d) Update value for particles

Fig.2 Algorithm for MPM

$$m_i^k = \sum_{p=1}^{N_p} M_p N(\mathbf{x}_p^k) \tag{2}$$

粒子の応力，体積力および各節点における内挿関数の空間勾配を用いて，節点外力 $\mathrm{f}^{\mathrm{int}}$，内力 $\mathrm{f}^{\mathrm{ext}}$ を求め，節点加速度を算出し，節点速度を更新する．

$$\mathbf{a}_i^k = \left(\mathbf{f}_i^{\mathrm{int},k} + \mathbf{f}_i^{\mathrm{ext},k}\right) / m_i \tag{3a}$$

$$\mathbf{v}_i^L = \mathbf{v}_i^k + \mathbf{a}_i^k \Delta t \tag{3b}$$

キーワード　数値解析，粒子法，斜面崩壊，岩盤崩落
連絡先　〒903-0213　沖縄県西原町字千原１番地　TEL. 098-895-8672

次に節点加速度, 速度を粒子に集約し, 粒子の位置, 速度を更新する.

$$\mathbf{x}_p^{k+1} = \mathbf{x}_p^k + \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{v}_i^L N(\mathbf{x}_p^k)\Delta t \tag{4a}$$

$$\mathbf{v}_p^{k+1} = \mathbf{v}_p^k + \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{a}_i^k N(\mathbf{x}_p^k)\Delta t \tag{4b}$$

そして運動量保存則より, k+1 ステップにおける節点速度を求める.

$$\mathbf{v}_i^{k+1} = \sum_{i=1}^{N_n} M_p \mathbf{v}_p^{k+1} N(\mathbf{x}_p^k) \Big/ m_i^k \tag{5}$$

粒子のひずみ増分を求め, 質量保存則より, 粒子の密度を更新する.

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p^{k+1} = \frac{\Delta t}{2}\sum_{i=1}^{N_n}\left\{\nabla N_i(\mathbf{x})\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p}\mathbf{v}_i^{k+1} + \left(\nabla N_i(\mathbf{x})\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p}\mathbf{v}_i^{k+1}\right)^{\mathrm{T}}\right\} \tag{6a}$$

$$\rho_p^{k+1} = \rho_p^k \Big/ \left\{1+\mathrm{tr}\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p^{k+1}\right)\right\} \tag{6b}$$

3. エネルギー変動に対する抑制法（MIS-MPM）

本研究では MPM の弾性解析におけるエネルギー変動に関して, 着目粒子のひずみ増分値（式(6a)）を近傍粒子のひずみ増分値を用いて補間することで, 連続体のエネルギー変動の修正を行った. 具体的には, 近傍粒子のひずみ増分値を用いて次式の重み付き自乗和を最小にすることで, 着目粒子の修正ひずみ増分値 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{modified}}$ は求められる.

$$J = \sum_{p=1}^{n} w(r_{ij},h)\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{modified}} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p\right)^2 \tag{7}$$

ここで, J : 残差の自乗和, n : 近傍粒子数, $w(r_{ij}, h)$: 重み関数, r_{ij} : 近傍粒子との距離, h : 影響半径（Fig.3 参照), $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p$: 粒子 p のひずみ増分値である. 本研究において, 式(7)の停留条件より得られる修正ひずみ増分値を用いた手法を MIS-MPM と呼ぶ. なお MIS-MPM のアルゴリズムに関して, 式(6a)より各粒子のひずみ増分値を求め, 式(7)によりひずみ増分値を修正し, そして各粒子の密度を更新することになる（式(6b)).

4. 数値解析例

Fig.4 に解析モデルを示す. この問題では, 同図に示す物性値を有する弾性体の自由落下解析を行い, 従来の MPM と MIS-MPM のエネルギー保存に対する精度検証を行った. なお影響半径は, Mesh 幅に任意の係数（Fig.5 において a と記す）を乗じ決定した. Fig.5 に時間と正規化エネルギーの関係を示す. 同図より, MPM は時関経過に伴い, エネルギーが増加傾向であった. 一方, MIS-MPM は影響半径の大きさに関係なくエネルギーの変動が少なくなる結果となった.

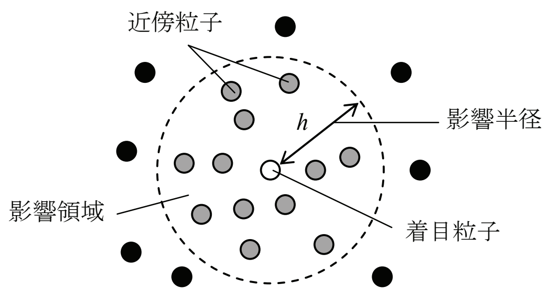
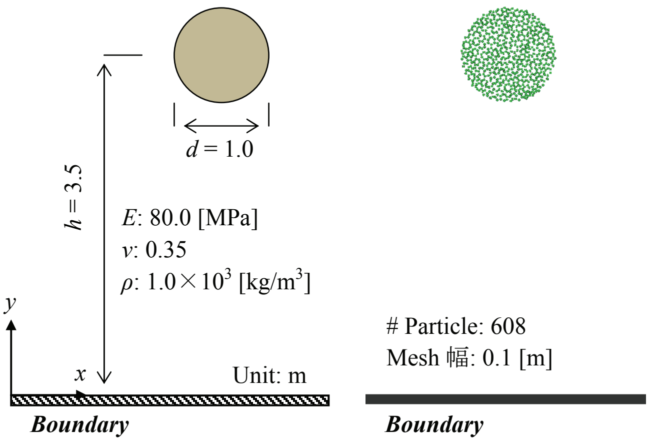


Fig.3 ひずみ増分補正の概念図



(a) Physical parameters (b) Analytical model

Fig.4 Free fall model

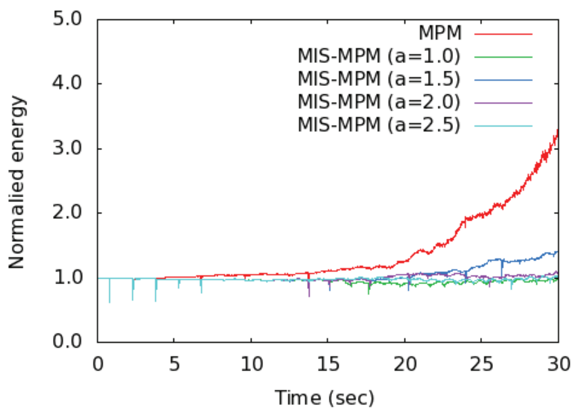


Fig.5 MPM vs. MIS-MPM

5. おわりに

本研究では, Material Point Method（MPM）のエネルギー変動に対する抑制法（MIS-MPM）の提案を行った. その結果, 従来の MPM 比べ, エネルギーの変動を抑えることが可能となった. 今後は MIS-MPM を斜面崩壊問題に適用したいと考える.

参考文献

1) Sulsky, D., Zhou. S. J. and Schreyer, H.L.: Application of a particle-in-cell method to solid mechanics, *Computer Physics Communications*, Vol.87, pp.236-252, 1995.