

信頼性設計法における性能関数の定義と安全率に関する数理統計学にもとづく考察 —波力に対する外的安定問題—

太陽工業株式会社 正会員 足立一美

1. はじめに

2007年に港湾法第56条の2の2の規定にもとづく「港湾の施設の技術上の基準」¹⁾が改定され港湾施設の設計における性能規定化が図られた。

この施設が有すべき性能を照査する手段として信頼性設計法が導入されたことは、周知のとおりである。信頼性設計法においては、作用力 S と抵抗力 R を正規分布に従うものとして、性能関数 Z を定義し Z の値 (例えば $Z > 0$) であれば、構造物は外的に安定であるとする。

従来、この性能関数の定義の仕方によって破壊確率が異なるという困った問題を内包し、実用化の障害となっていた。この問題は、Hasofer, et al.^{2),3)}によって解決されていたが十分に実用上の検討がなされずに、長尾⁴⁾によって採用され今日に至っている。

ところが多くの場合、性能関数は統計学において品質管理に応用される2標本問題と同じく、抵抗力 R と作用力 S の差として定義されている。このことは、 R と S が正規分布に従うものとすれば、「正規分布の再生性」(Reproductive Property)によってその後の統計上の取り扱いがきわめて簡単になるという大きな利点を有しており、正統的な手法である。

ところで、国土交通省港湾局によれば2000年までに全国で防波堤が延長500km、係留施設が900km整備されており⁵⁾、これらはすべて R と S の比すなわち「安全率」によって設計されているものと考えられる。

2. 研究の目的

上述の状況を踏まえ、本研究においては R/S で性能関数を定義し、安全率に関する数理統計学にもとづく考察を行い、信頼性設計法に対する理解の向上ならびに今後、重要性が増してくる既設構造物の維持管理に資することを目的とした。本稿では、対象を重力式構造物の波力に対する外的安定問題に限定する。

3. 既設防波堤の被災遭遇確率

河合・平石ら⁶⁾は、供用中の多くの既設防波堤について、沖波波高、潮位、波浪変形計算、波力算定、摩擦係数のばらつきを考慮してレベル3設計法によって被災遭遇確率を求めた。そして混成堤の滑動安全率 F_s と滑動遭遇確率 P_s と間には、平均的に式(1)に示す関係があることを明らかにした。

$$P_s = 10^{(1.45-2.05F_s)} \quad (1)$$

4. 性能関数の定義と破壊確率の不変性

Hasofer, et al.は、性能関数を破壊点(設計点)の回りでテーラー展開し、線形近似することによって性能関数の定義式によって破壊確率が変わらないことを示した。

5. 波力と摩擦係数の確率密度関数とその母数

Takayama, et al.⁷⁾は、合田⁸⁾の波力に関する実験結果および森平ら^{9),10)}の摩擦係数に関する実験結果を整理し、ケーソン式混成堤について波力が合田波圧を1としたとき平均0.91、変動係数0.19、摩擦係数が平均 0.6×1.06 、変動係数0.15に従う正規分布で表されることを明らかにした。そして、この成果が長尾による港湾構造物の信頼性設計法に関する一連の研究において使われている。性能関数が正規分布に従う確率密度関数となると、破壊確率 P_f は信頼性指標 $\beta = \mu_z / \sigma_z$ が分かれば式(2)を用いて計算できる。

$$P_f = 1 - \Phi(\beta) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\beta} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \quad (2)$$

すなわち、 Φ は標準正規確率分布関数である。

6. $Z=R/S$ の従う確率密度関数

R を正規分布に従う確率変数で、その平均を μ_R 、標準偏差を σ_R とする。同様に、 S を正規分布に従う確率変数で、その平均を μ_S 、標準偏差を σ_S とする。このとき、性能関数 $Z=R/S$ が従う確率密度関数を求める。つまり、性能関数を安全率の定義式と等しくした場合について考察する。

数学的に厳密に言えば、まず R/S が確率密度関数となることを証明しなければならない。紙幅の制約から、この証明は省略して結論を述べれば、 $Z=R/S$ は $S=0$ の場合を除き確率密度関数となる。

$Z=R/S$ の確率密度関数は、 $R(\theta_R, \sigma_R)$ と $S(\theta_S, \sigma_S)$ が正規分布に従い、互いに独立のとき式(3)で与えられる^{11),12)}。

$$f(Z) = \frac{b(z)d(z)}{\sqrt{2\pi}\sigma_R\sigma_S a(z)^3} \left[\Phi\left\{\frac{b(z)}{a(z)}\right\} - \Phi\left\{-\frac{b(z)}{a(z)}\right\} \right] + \frac{1}{\pi\sigma_R\sigma_S a(z)^2} \exp\left\{-\frac{c}{2}\right\} \quad (3)$$

$$a(z) = \left(\frac{z^2}{\sigma_R^2} + \frac{1}{\sigma_S^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad b(z) = \left(\frac{\theta_R z}{\sigma_R^2} + \frac{\theta_S}{\sigma_S^2}\right), \quad c(z) = \frac{\theta_R^2}{\sigma_R^2} + \frac{\theta_S^2}{\sigma_S^2}$$

$$d(z) = \exp\left\{-\frac{b(z)^2 - c(z)^2}{2a(z)^2}\right\},$$

$$\text{ここに、} \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

キーワード：信頼性設計法、性能関数、安全率、数理統計学、波力に対する外的安定

連絡先：東京都世田谷区池尻 2-33-16 電話：(03)3791-3361, FAX：(03)3791-5454

7. 具体的な計算例

図-1 に Takayama, *et al.*によって求められた正規分布に従う合田波力および摩擦抵抗力を示す。重力式ケーソンのコンクリートや中詰砂の単位体積重量の平均値のバイアスや変動係数は小さいので、ここでは無視できるものとして扱う。

c を定数, X を確率変数とすると, 期待値 (平均) E と分散 V は式(4)および式(5)となる。

$$E(cX) = cE(X) \quad (4)$$

$$V(cX) = c^2V(X) \quad (5)$$

この関係を用いて, 図-1 の確率密度関数を滑動安全率 1.2 に対する確率密度関数として示すと図-2 が得られる。

式(3)によって計算した安全率が 1.2 の場合の $Z=R/S$ の確率密度関数を図-3 に示す。

このとき Z の平均 μ_Z および破壊確率 P_{zf} は, 式(6)および式(7)で計算される。ただし, $Z=R/S < 1$ のとき破壊するものとする。

$$\mu_Z : \int_{-\infty}^{\mu_Z} f(z) dz = 0.5 \quad (6)$$

$$P_{zf} = \int_{-\infty}^1 f(z) dz \quad (7)$$

これから $\mu_Z = 1.398$ および $P_{zf} = 0.0799$ が得られる。

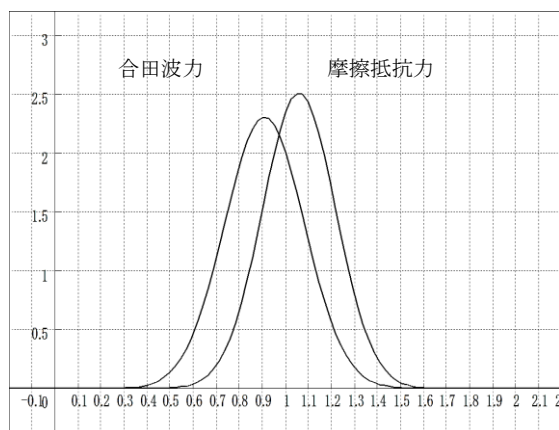


図-1 正規分布に従う合田波力と摩擦抵抗力 (滑動安全率: 1.0)

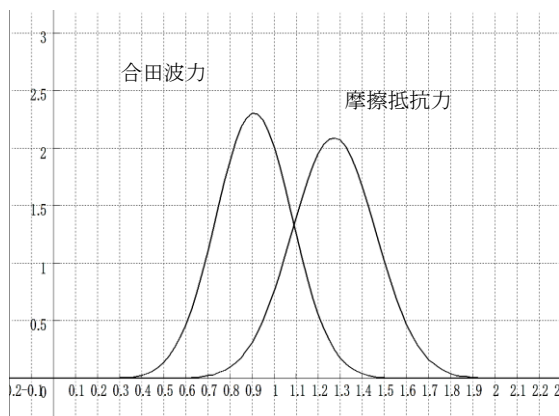


図-2 正規分布に従う合田波力と摩擦抵抗力 (滑動安全率: 1.2)

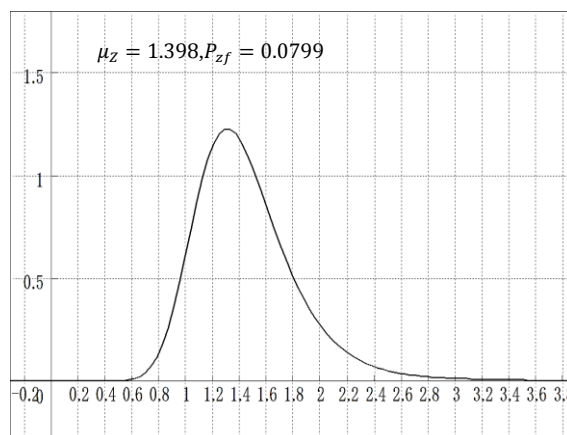


図-3 $Z=R/S$ の確率密度関数
(合田波力の滑動安全率: 1.2)

8. まとめ

本研究では性能関数として安全率そのもの $Z=R/S$ を採用し, その確率密度関数を求めて平均と破壊確率を直接に計算することを可能とした。これによって安全率による設計法と現在の信頼性設計法との関係が明確になるとともに, 加えて既設構造物の安全性の評価を可能にした。ここでは, 波力に対する外的安定問題に限定して論述した。他の破壊モードや, 確率変数間に相関がある場合 (本稿には記述していない) にも容易に適用可能であることを付言する。

本研究は現在の性能設計体系および信頼性設計法を, 異なった視点から眺めることによって, これらを補完するものであると考えている。

参考文献

- 1) 日本港湾協会: 港湾の施設の技術上の基準・同解説, 2007.
- 2) Hasofer, A.M., N.C. Lind: Exact and Invariant Second-Moment Code Format, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, pp111-120, 1974.
- 3) 星谷 勝, 石井 清: 構造物の信頼性設計法, p209, 鹿島出版会, 1986.
- 4) 長尾 毅: ケーソン式防波堤の外的安定に関する信頼性設計手法の提案, 国土技術政策総合研究所報告, No.4, 2002.
- 5) (社) 日本港湾協会: 数字でみる港湾, 2009.
- 6) 河合弘泰, 平石哲也, 関本恒浩: 防波堤堤体の不確定要因が被災遭遇確率に及ぼす影響, 海洋開発論文集, Vol.13, pp579-584, 1997.
- 7) Takayama, T., Ikeda, N.: Estimation of Sliding Failure Probability of Present Breakwater for Probabilistic Design, *Report of the Port and Harbour Research Institute*, Vol.31, No.5, pp3-32, 1993.
- 8) 合田良実: 防波堤の設計波圧に関する研究, 港湾技術研究所報告, 第12巻, 第3号, pp31-69, 1973.
- 9) 森平倫生, 木原 力, 堀川 洋: 混成防波堤捨石マウウンドの摩擦係数について, 第25回海岸工学論文集, pp337-341, 1978.
- 10) 森平倫生, 足立一美: 混成防波堤捨石マウウンドの摩擦係数について (第2報), 第26回海岸工学論文集, pp446-450, 1979.
- 11) Fieller, E.C.: The distribution of the index in a normal bivariate population. *Biometrika* 24, pp428-440, 1932.
- 12) Hinkly, D.V.: On the ratio of two correlated normal random variables, *Biometrika*, 56, 3, pp635-639, 1969.