

自然河川の水理解析における一般座標格子が有する 格子構成由来の打切り誤差の理論的評価とその緩和手法

新潟大学大学院自然科学研究科 学生員○中土 紘作
新潟大学大学院自然科学研究科 学生員 星野 剛
新潟大学災害・復興科学研究所 正員 安田 浩保

1. はじめに

境界適合に一般座標を導入した河川の流況や河床変動の解析法は、格子構成の自由度の高さから解析対象の飛躍的な拡張に多大な貢献を果たしてきた。この数値解析法は、精密な数値水理モデルと適切な格子構成が一對となつてはじめて性能が最大化される。水理モデルとしての研究はこれまでに高精度の差分スキームを導入や高次の物理項の導入などを中心に行われてきた。一方で、対になる格子の生成法は水理モデルの高度化とは独立にいくつか提案されてきた。しかし、水理モデルと格子生成法の交点である、格子構成の良否と解の応答特性については、数値解析の信頼性に根幹的な影響を及ぼすにもかかわらずほとんど研究されていない。両者の関心が十分に交わることなく現在に至り、学問的な空白域のまゝとなっている。

安定に解を得るためには歪曲が小さく滑らかな格子構成が経験的に優れているとされ、滑らかな格子の生成法はThompsonら¹⁾により体系化されたことはよく知られた事実である。しかし、彼らのものをはじめとする格子生成法がメトリックスの打切り誤差の緩和に効果を発揮することが予見されるにもかかわらず、このようにして得られた格子構成と水理計算の安定性の対応関係について理論的な根拠が過去に示されたことはないようである。

本研究では、上述までの問題の明確化と解決のため、まず、一般座標の格子構成が内包する打切り誤差の定量的な算定法を示し、メトリックスの打切り誤差が水理解析に与える影響について考察した。また格子構成が内包する打切り誤差を緩和するための格子整正法の効果についても論じる。

2. メトリックスの打切り誤差

(1) 2次元打切り誤差

2次元における1階の微係数の一般座標変換は周知のとおり

$$f_x = \frac{1}{J} [y_\eta f_\xi - y_\xi f_\eta] \quad (1)$$

のように与えられる。 f_y は省略する。ここで、 x, y は物理面の座標、 ξ, η は計算面の座標、両者の間には $x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$ 、また $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$ の対応関係があるものとする。 J は変換のヤコビアンである。 $x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$ である。

f_η, f_ξ をそれぞれTaylor展開し、式(1)に代入すると中央差分における誤差式

$$T_x = \frac{1}{2J} [(y_\xi x_\eta x_{\eta\eta} - y_\eta x_\xi x_{\xi\xi}) f_{xx} + (y_\xi y_\eta y_{\eta\eta} - y_\eta y_\xi y_{\xi\xi}) f_{yy}$$

$$+ \{y_\xi(x_\eta y_{\eta\eta} + y_\eta x_{\eta\eta}) - y_\eta(x_\xi y_{\xi\xi} + y_\xi x_{\xi\xi})\} f_{xy}] + O(\Delta\xi^3, \Delta\eta^3) \quad (2)$$

が得られることをThompsonら¹⁾は示している。同様に y 方向の式も同様に算出される。ここで、 T_x, T_y はそれぞれ式 f_x, f_y が内包する打切り誤差である。

(2) 自然河川に対応した打切り誤差

上述した誤差評価式(2)は f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} の3種類の物理量の2階微分項を含んでいるため、これらの式から直接的な誤差量の評価は極めて困難である。そこで2階微分項を河道の流下方向(以降 i 軸方向とする)と河道の横断方向(以降 j 軸方向とする)に分けて表現する。実際の河川の流れについて考えると流下方向のエネルギー勾配が卓越するため、 i 軸方向の運動が水理現象に対して支配的であるといえる。そのため以降の議論は i 軸方向に着目して進める。そこで、新たに x 軸と i 軸のなす角を θ_i を導入すると、 i 軸方向の誤差量 T_i は、

$$T_i = \left[\left(\begin{array}{c} T_{x1} \\ T_{y1} \end{array} \right) \cos^2 \theta_i + \left(\begin{array}{c} T_{x2} \\ T_{y2} \end{array} \right) \sin^2 \theta_i + \left(\begin{array}{c} T_{x3} \\ T_{y3} \end{array} \right) \frac{\sin 2\theta_i}{2} \right] f_{ii} \quad (3)$$

となる。ここで T_x の f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} に関する項の係数をそれぞれ T_{x1}, T_{x2}, T_{x3} とする。 T_y に関しても同様に T_{y1}, T_{y2}, T_{y3} とした。本研究では格子形状のみに起因する誤差量を把握したい。そのため以降は物理空間における i 軸上の格子辺長と物理量の2階微分 f_{ii} で除した無次元化した誤差評価式 T'_i により格子形状の良否を評価した。なお、以降ではことわりがない限り、格子構成に由来する打切り誤差をすべて「打切り誤差」と称する。

3. 自然河川の水理解析における打切り誤差

(1) 解析対象と水理計算

水理解析の対象とした河川は新潟県長岡市を貫流する塩谷川の河口から5kmから7kmの区間とする。この区間は山間部に位置しており、平均河床勾配は1/250程度である。河道形状は曲率の大きい連続した蛇行部を有しており、手作業の試行錯誤により誤差の抑制した格子を生成することは困難なことが予想される。この計算領域において洪水時流量650³/sを上流端境界条件とし、下流端には実測の水位57.5mを横断方向に一樣に与え続けた定常計算を実施した。

(2) 測量測線に基づく計算格子

実河川の幾何学形状を一般座標により境界適合する場合、河道測量の際に設定された測線を基準にした格子構成が一般的な方法である。これに従い計算格子を生成した。図-1(a)に格子と打切り誤差量の分布図を示した。

Key Words: truncation error, metric, general curvilinear coordinate system, numerical grid generation
〒950-2181 新潟市西区五十嵐2の町 8050 TEL 025-262-7053

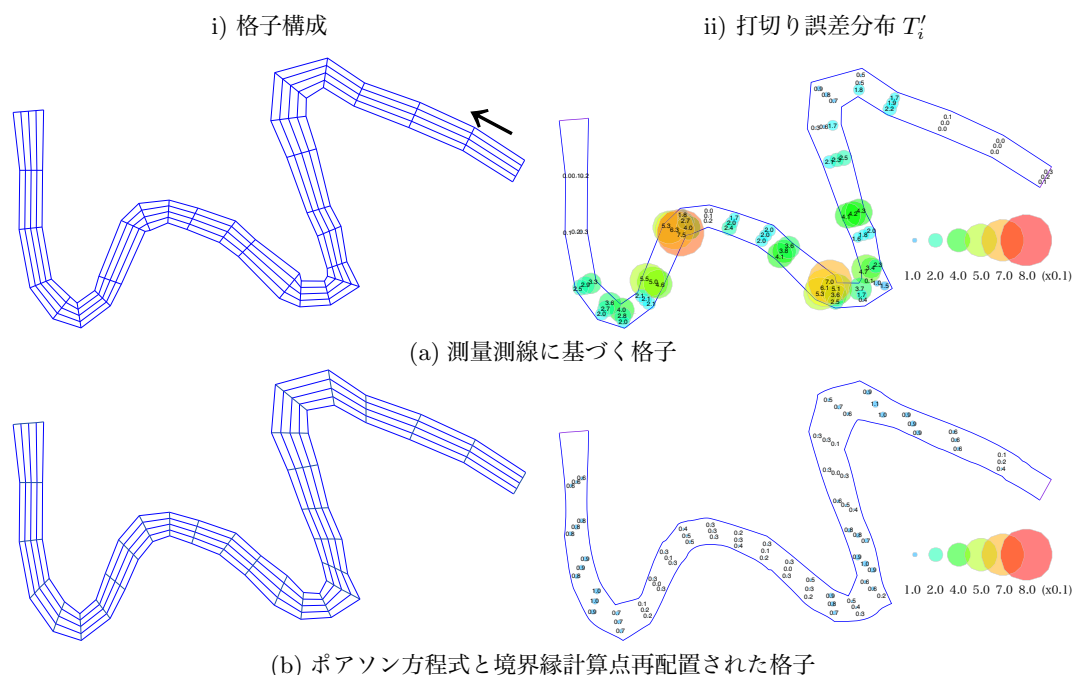


図-1 格子構成、打ち切り誤差分布図

図中の丸の大きさが打ち切り誤差量 T_i' を表しており、この格子は計算点間隔の変化率が大きい箇所、打ち切り誤差が大きくなっていることが分かる。

この格子における解析結果の縦断水位分布を図-2の赤線で示した。この河道の平均河床勾配は1/250と大きいにも関わらず、水面が逆勾配となる箇所が複数見られた。そのうえ、定常条件を与えたにもかかわらず水面振動が収まらず、水理学的に妥当な解が得られなかった。このことは、打ち切り誤差が解に影響を与えていることが示唆される。

(3) ポアソン方程式と境界線上の計算点再配置による打ち切り誤差の緩和

楕円型偏微分方程式による打ち切り誤差の緩和を試みた。楕円型偏微分方程式は境界値問題として解かれるため横断方向境界線の計算点の再配置を行った。ただし、境界線の計算点間隔の変化率を20%以内となるように調整した。

次に、次式に示す局所的な格子密度の調整が可能なポアソン方程式による格子生成法を導入した。

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = -\frac{1}{J^2} [P(\xi, \eta)x_{\xi} + Q(\xi, \eta)x_{\eta}] \quad (4)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = -\frac{1}{J^2} [P(\xi, \eta)y_{\xi} + Q(\xi, \eta)y_{\eta}] \quad (5)$$

本手法では式中の右辺 $P(\xi, \eta), Q(\xi, \eta)$ の求め方については Steger and Sorenson²⁾の方法を用いた。この手法により整正した格子と打ち切り誤差量を図-1(b)に示す。この格子の打ち切り誤差は大幅に減少した。

解析結果においてもこれまでの水面の局所的な起伏や水位の逆勾配が発生しない水理学的に妥当な解が得られた。これらのことからポアソン方程式による打ち切り誤差緩和手法と境界線計算点の再配置手法の組み合わせは自然河川に対する計算格子整正法として有効な手法であると判断出来る。

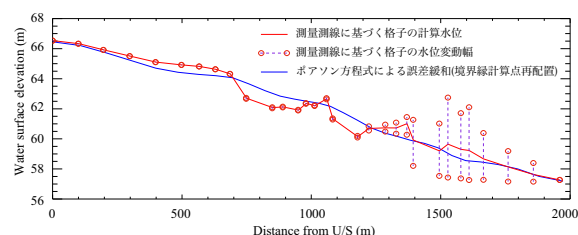


図-2 解析結果の縦断水位

4. おわりに

一般座標による写像は言うまでもなく理論的には無謬であり、本論文で取り上げたメトリックスの打ち切り誤差は数値解析にのみ見られる特有の問題である。

本研究では、まず、メトリックスの打ち切り誤差の評価式を応用することで、格子構成ごとの解の妥当性と安定性を水理計算を実施することなく理論的に推定できることを示す。さらに、一般座標による境界適合を実施してもメトリックスの打ち切り誤差が大きな格子構成では支配方程式を満足する解を得られないことを示した。

つぎに、広く用いられている横断測線を基準とした実河川の格子構成は、数学的な打ち切り誤差緩和手法の導入によって解の妥当性と安定性を大幅に向上させられることを示した。格子構成に由来する打ち切り誤差が緩和された計算格子では、支配方程式を満足する物理的な合理性を有する解が時空間の分布間隔を不必要に細分化することなく安定に得られるようになる。

参考文献

- 1) Joe F. Thompson, Z.U.A. Warsi and C. Wayne Mastin, Numerical Grid Generation Foundations and Applications, www.hpc.msstate.edu/publications/gridbook/.
- 2) Steger, J.L. and Sorenson, R.L., Automatic mesh-point clustering near a boundary in grid generation with elliptic partial differential equation, *J Comput Phys*, pp.405-410, 1979.