

河川における定在波の発生条件

中央大学大学院

中央大学大学院

中央大学理工学部

学生会員

学生会員

フェロー会員

○笠間 雄一郎

銭潮潮

山田 正

1. はじめに

河川で発生する波のメカニズムを解明することは河川計画において重要である。それは波の発生により河川水位の上昇や河川構造物にかかる外力が増加することが考えられるからである。

河川における定在波の発生に関して水理物理量である単位幅流量 q 、全水頭(エネルギー) E 、運動量 F の関係から、波の発生を決定する理論が Benjamin と Lighthill ら¹⁾によって導き出されている。この理論は河床の摩擦抵抗と河床勾配がない開水路で、単位幅流量 q とベルヌーイサム E 、運動量 F を上流端に人為的に与え、波の発生条件について基礎的な議論をしている。図-1は河床勾配のみを考慮し、単位幅流量が一定の条件における定在波の発生条件を表している。横軸は、上流端における全水頭を限界全水頭 E_c で無次元化することにより得られる r :(無次元化全水頭)である。縦軸は上流端における運動量を限界運動量 F_c で無次元化することにより得られる s :(無次元化運動量)である。領域 A は、波の発生及び存在を表す。また、領域 B は、波も流れも発生していないことを示している。本研究は、Benjamin と Lighthill 理論を基に、河床勾配がある状態と河床の摩擦抵抗がある場合における定在波の発生条件の導出を行う。また、勾配が異なる場合と河床に摩擦抵抗がある場合において領域 A がどのように変化するか検証すると共に、 r と s の理論式との比較を行い、既存の理論を充実させることを目的とする。

領域 A は、波の発生及び存在を表す。また、領域 B は、波も流れも発生していないことを示している。本研究は、Benjamin と Lighthill 理論を基に、河床勾配がある状態と河床の摩擦抵抗がある場合における定在波の発生条件の導出を行う。また、勾配が異なる場合と河床に摩擦抵抗がある場合において領域 A がどのように変化するか検証すると共に、 r と s の理論式との比較を行い、既存の理論を充実させることを目的とする。

2. 勾配を有する開水路での波の発生条件

単位幅流量 q 、全水頭 E 、運動量 F が各断面で一定とし、波を伴う流れが発生していると仮定すると、 ρ を水の密度、 g を重力加速度、勾配を θ 、 y を任意の水深とし、理論導出の基礎となる各水理量を(1)、(2)、(3)式で表す。

$$q = \psi \quad (1) \quad F = \int_0^{\eta \cos \theta} \left(\frac{p}{\rho} + \psi_y^2 \right) dy \quad (2)$$

$$E = \frac{1}{2} (\psi_x^2 + \psi_y^2) + gy \cos \theta + \frac{p}{\rho} \quad (3)$$

(2)式は運動量、(3)式は全水頭を表し、(2)、(3)式のゲージ圧 p は自由表面上で 0 である。流れ関数 ψ は(4)式のようにおき、水平方向、鉛直方向の流速はそれぞれ、(5)、(6)式で表す。

$$q = yf(x) - \frac{y^3}{3!} f''(x) + \frac{y^5}{5!} f'''(x) \quad (4)$$

$$\psi_x = yf'(x) - \frac{y^3}{6} f'''(x) \quad (5) \quad \psi_y = f(x) - \frac{y^2}{2} f''(x) \quad (6)$$

流れ関数 ψ は、流線上で一定の値をとる。(3)、(2)式より(7)式が得られる。さらに、(5)、(6)式を二乗して微小項を無視し(7)に代入することで運動量 F を任意関数 $f(x)$ で表した(8)式を得る。

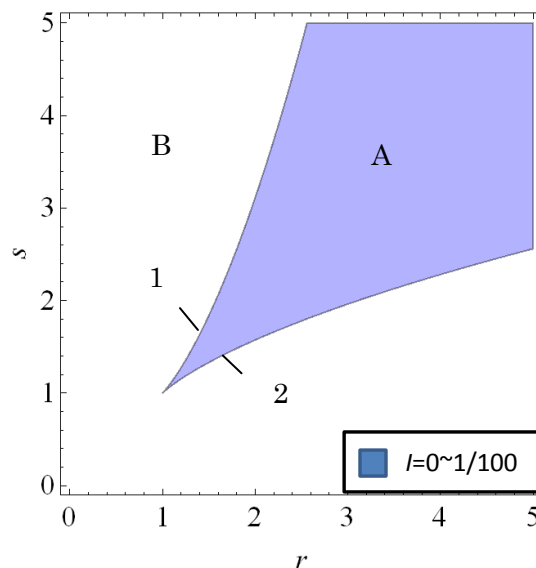


図-1 河床勾配を考慮した定在波の発生条件図

$$F = E\eta - \frac{1}{2} g\eta^2 \cos \theta - \frac{1}{6} f'(x)^2 \eta^3 \cos^3 \theta + \frac{1}{2} f(x)^2 \eta \cos \theta - \frac{1}{6} f(x) \cdot f''(x) \eta^3 \cos^3 \theta \quad (7)$$

$$F = \int_0^{\eta} \left(E - gy \cos \theta - \frac{1}{2} \psi_x^2 + \frac{1}{2} \psi_y^2 \right) dy \quad (8)$$

また(4)式は、 ψ は水面で一定であることを考慮し、任意関数 $f(x)$ で表す。さらに $f(x)$ を微分し、また二乗した式を(8)式に代入して任意関数 $f(x)$ を消去することで水深 η に関する三次方程式(9)式を得る。

$$\frac{1}{3} q^2 \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 + g \cos \theta \eta^3 - 2E\eta^2 + 2F\eta - q^2 = 0 \quad (9)$$

(9)式の η 、 x 、 E 、 F を限界水深におけるそれぞれの水理物理量を用いて無次元化することにより(10)式を得る。

$$\frac{1}{3} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + \cos \theta w^3 - (1 + 2 \cos \theta) r w^2 + (2 + \cos \theta) s w - 1 = 0 \quad (10)$$

ここで、 w 、 z はそれぞれ無次元化した水深と流れ方向の変化を表している。下線部の無次元化した水深に関する三次方程式(10)式が勾配のない状態において、異なる三つの実数解をもつ条件はカルダノの公式を用いることにより判別式(11)式で表すことができる。

$$3r^2 s^2 + 6rs - 1 - 4(r^3 + s^3) > 0 \quad (11)$$

キーワード 定在波、無次元化、全水頭、運動量、河床勾配 河床の摩擦抵抗

連絡先 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学大学院理工学研究科河川水文研究室 Tel:03-3817-1805

E-mail: lemondcanon@yahoo.co.jp

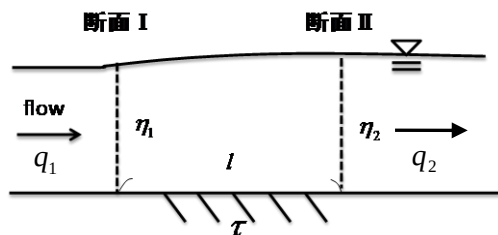
判別式(11)式を満たす r と s のとる値が図-1の A 領域に対応し、波が存在することを表す。A 領域と B 領域を分けている上側の境界線 1 は等流の常流を表しており、下側の境界線 2 は等流の射流を表している。勾配がある場合を考慮した判別式 (12) を用いて、任意の勾配に対する定在波の発生条件を導くことが出来る。

$$-4\left(-\frac{1}{3}r^2 \cos \theta^2 (1+2 \cos \theta)^2 + \frac{s}{\cos \theta} (2 + \cos \theta)\right)^3 - 27\left(\frac{1}{3}rs \cos \theta^2 (2 + \cos \theta)(1+2 \cos \theta) - \frac{2}{27}r^3 \cos \theta^3 (1+2 \cos \theta)^3 - \frac{1}{\cos \theta}\right)^2 > 0 \quad (12)$$

図-1 は勾配を考慮した判別式(12)式の θ の変化に対する A 領域を表した図である。

青色の領域は開水路に勾配を 0~1/100 で与えた場合の A 領域を表しており、既存の波の発生条件図と比べると、A 領域と B 領域を分けている上側の境界線 1 と A 領域と B 領域を分けている下側の境界線 2 に変化がないことから、A 領域に全く変化がないことが分かった。勾配がさらに緩やかな 1/1000, 1/10000 の場合においても同様の結果が得られた。このことから実河川の勾配であれば定在波の発生条件に影響しないことが分かった。

3. 流れに働く外力を考慮した波の発生条件



開水路流れの模式図

水路幅が一定で河床勾配がフラットかつ河床の摩擦抵抗がある場合の水利物理量、 E, F は運動量の定理とエネルギー保存則より、(13),(14)式となる。 l は I, II 断面間の距離、 R は径深、 η_1, η_2 は各断面での水深、 E_1, E_2 は各断面の全水頭、 F_1, F_2 は表す。(15)式は河床勾配と摩擦抵抗を考慮していない水深に関する三次方程式である。

$$E = E_1 - E_2 = \frac{d}{\rho g R} \quad (13) \quad F = F_1 - F_2 = \frac{d}{\rho g} \quad (14)$$

$$\frac{1}{3}q_1^2 \left(\frac{d\eta_1}{dx}\right)^2 + g\eta_1^3 - 2E\eta_1^2 + 2F\eta_1 - q_1^2 = 0 \quad (15)$$

さらに、(13),(14)式と各断面間の水深 η 、単位幅流量 q の関係を補正係数 α, β とし、(13),(14)式を用いて(15)式を変形すると河床の摩擦抵抗を考慮した水深に関する三次方程式(18)式を得ることが出来る。

$$\eta_1 = \alpha \eta_2 \quad (16) \quad q_1 = \beta q_2 \quad (17)$$

$$\frac{1}{3}\alpha^2\beta^2q_2^2\left(\frac{d\eta_2}{dx}\right) + g\alpha^3\eta_2^3 - 2\alpha^2\left(E_2 + \frac{d}{\rho g R}\right)\eta_2^2 + 2\alpha\left(F_2 + \frac{d}{\rho g}\right) - \beta^2q_2^2 = 0 \quad (18)$$

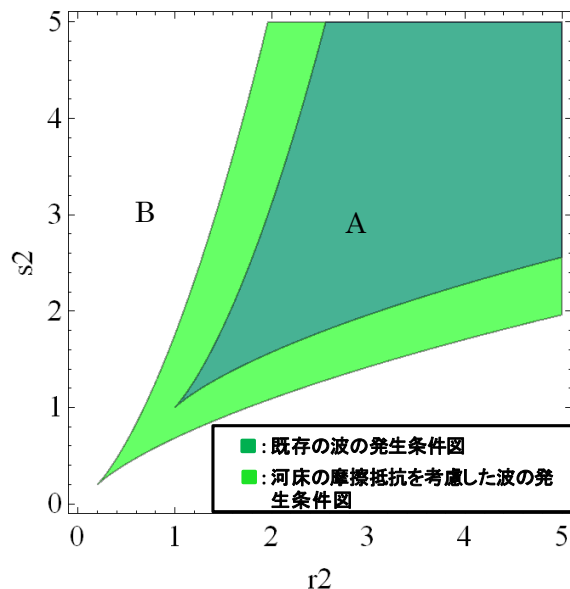


図-2 河床の摩擦抵抗を考慮した定在波の発生条件図 (r と s の関係)

(18)式を限界流れでの水利物理量で無次元化することにより、無次元化した水深に関する三次方程式(21)式を得ることが出来る。

$$H_1 = \frac{d}{\rho g R E_c} \quad (19) \quad T = \frac{d}{\rho g F_c} \quad (20)$$

$$\frac{1}{3}\alpha^2\beta^2\left(\frac{dw_2}{dx}\right)^2 + \alpha^3w_2^3 - 3\alpha^2(r_2 + H_1)w_2^2 + 3\alpha(s_2 + T)w_2 - \beta^2 = 0 \quad (21)$$

(19)式は無次元化摩擦損失水頭 H_1 を表し、(20)式は無次元化せん断力 T を表している。また r_2 は断面 II での無次元全水頭、 s_2 は無次元運動量を表す。無次元化した水深に関する三次方程式(21)式の w_2 が異なる実数解を持つ条件式は(22)式で表される。

$$-4\left(\frac{3}{\alpha^2}((s_2 + T) - (r_2 + H_1)^3)\right)^3 - 27\left(\frac{1}{\alpha^3}(3(r_2 + H_1)(s_2 + T) - 2(r_2 + H_1)^3 - \beta^3)\right)^2 > 0 \quad (22)$$

河床の摩擦抵抗を考慮した波の発生条件式(22)式の無次元摩擦損失水頭 H_1 と無次元せん断力 T に任意の値を与えると領域 A が広域になる。図-2 は $H_1=0.8, T=0.8, \alpha=1, \beta=1.25$ を与えた時の波の発生条件図である。既存の発生条件図と比べると領域 A が広がっていることが分かる。このことから河床抵抗を考慮する方が河川で波が発生し易いことが理論拡張の結果から言える。

5. まとめ

拡張した理論の検証で得られた知見を以下に示す。

- 1) 河床勾配が 1/10000~1/100 程度であれば定在波の発生条件に影響を及ぼさないことを示した。
- 2) 河床の摩擦抵抗が存在すると河川で定在波が発生し易くなることを示した。

6. 参考文献

- 1) T.B. Benjamin and M.J.Lighthill: On cnoidal waves and bores, 1950