運動量補正係数βを含む浅水流運動方程式に基づく波動方程式に関する一検討

名城大学理工学部　正会員　新井宗之

1．はじめに

中国・雲南省の蒋家溝で観測される粘性土石流と呼ばれる土石流サージは多数の間欠的なサージとして流下することが知られているが，日本の鹿児島県桜島の野尻川，オーストリアの西部山間部，イタリア北部山間部等でもこのような間欠的な多数のサージが観測されており，このような転波列性の間欠的サージは粘性土石流特有な現象ではない．しかし，これらの転波列性サージの波動性についてはまだあまり明らかにされていない．本研究では，傾斜水路における浅水流の運動方程式に基づく波動方程式において，流速分布形に関わる運動量補正係数がどのように波動方程式に関係しているかを明らかにすることを目的とする．

2．基礎方程式

傾斜水路上の流れを，非圧縮 ($\mathrm{div}\vec{v}=0$)，非回転 ($\mathrm{rot}\vec{v}=0$) 現象として取り扱い，速度ポテンシャルϕを導入して，流下方向をx，その水深方向をyとするとラプラス方程式の関係，$\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$ (1) がある．水深方向の流速成分をvとすると，水底 ($y=-h_0$) での境界条件は，$v=\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=0$ (2) である．平均水深 ($y=h_0$) からの水面の変動量$\eta(x,t)$が，水面の流体粒子とともに動く条件は，$v=\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=\dfrac{\partial\eta}{\partial t}+\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\dfrac{\partial\eta}{\partial x}$ (3) である．これは連続式を意味している．水面の急激な変動を有する浅水流の運動方程式，および連続式は次式のようである．

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\beta u\frac{\partial u}{\partial x}-(\beta-1)\frac{u}{A}\frac{\partial A}{\partial t}=g\sin\theta-g\cos\theta\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{f'}{2}\frac{u^2}{R} \quad (4)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial(Au)}{\partial x}=0 \quad (5)$$

ここに，u：x方向の断面平均流速，A：流積，g：重力加速度，θ：水路勾配，R：径深，h：水深，β：運動量補正係数，f'：摩擦損失係数．

$\beta=1$として導出した波動方程式の周期的矩形波等の初期条件による解析解と実験結果との波形の関係は比較的良好な対応を示しているため，急激な水面変動によってもたらされる応力項である式 (4) の左辺第 3 項は，水面変動の波動現象では相対的に微小な項であると推測される．しかしながら，この項がどのような位置付けになっているのかを明らかにするため以下のような検討を行うものである．

ここでは，水深hに比して水路幅Bが広い矩形断面の一様水路で，径深Rが$R\doteq h$として取り扱う．また，微小振幅の波とし，径深Rは平均水深h_0，摩擦損失係数f'は水深の関数であるが平均水深に基づく定数と仮定する．また，水深変動の項の一部に平均水深を用いる．したがって，運動量補正係数βを考慮する運動方程式 (4) は，左辺第 3 項に連続式 (5) を考慮すると次式のように表すことができる．

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(2\beta-1)u\frac{\partial u}{\partial x}-g\sin\theta+g\cos\theta\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{f'}{2}\frac{u^2}{h_0}+(\beta-1)\frac{u^2}{h_0}\frac{\partial h}{\partial x}=0 \quad (6)$$

ここで，流速係数$\varphi=\dfrac{u}{u_*}$，摩擦損失係数f'と摩擦速度u_*との関係$\dfrac{f'}{2}=\left(\dfrac{u_*}{u}\right)^2$より，左辺第 5 項を$\dfrac{f'}{2}\dfrac{u^2}{h_0}=\dfrac{u_*}{2\varphi h_0}u$とし，速度ポテンシャル$\phi$を用いると式 (6) は次式のように表すことができる．

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(2\beta-1)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2-g\sin\theta\,x+g\cos\theta\,h+\frac{u_*}{\varphi h_0}\phi+\frac{\beta-1}{h_0}\int\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial h}{\partial x}dx=0 \quad (7)$$

3．逓減摂動法による波動方程式

無次元量にはプライム (「′」) を付し，次のように定義する．$\phi'=\phi/(h_0v_{p0})$，$x'=x/h_0$，$y'=y/h_0$，$t'=tv_{p0}/h_0$，$\eta'=\eta/h_0$である．ここに，v_{p0}はGardner-Morikawa変換で用いている速度の次元を有するパラメータであるが，移動座標系においては座標の移動速度を意味しているパラメータである．Gardner-Morikawa(G-M) 変換は，$\xi=\epsilon^{\frac{1}{2}}\left(x-v_{p0}t\right)$，$\tau=\epsilon^{\frac{3}{2}}t$で，それぞれの無次元量は，$\xi'=\xi/h_0=\epsilon^{\frac{1}{2}}(x'-t')$，$\tau'=\tau v_{p0}/h_0=\epsilon^{\frac{3}{2}}t'$である．

以上のことより，ラプラス方程式 (1)，水底条件の式 (2)，水面条件の式 (3) の無次元方程式は，それぞれの方程式の変数にプライムを付した式となる．運動方程式は次式のようである．

$$\frac{\partial\phi'}{\partial t'}+\frac{1}{2}(2\beta-1)\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x'}\right)^2-{c_0}'^2\tan\theta\,x'+{c_0}'^2(1+\eta')+\tan\theta\frac{{c_0}'^2}{u_0'}\phi'+(\beta-1)\int\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x'}\right)^2\frac{\partial\eta'}{\partial x'}dx'=0 \quad (8)$$

ここに，$u_0'=u_0/v_{p0}$，$c_0'=c_0/v_{p0}$．

無次元量η'，ϕ'の摂動展開は

$$\eta'=\epsilon\eta'^{(1)}(\xi',\tau')+\epsilon^2\eta'^{(2)}(\xi',\tau')+\cdots \quad (9)$$

$$\phi'=\epsilon^{\frac{1}{2}}\left\{\phi'^{(1)}(\xi',y',\tau')+\epsilon\phi'^{(2)}(\xi',y',\tau')+\cdots\right\} \quad (10)$$

ここに，$\eta'^{(1)}=\dfrac{\eta^{(1)}}{h_0},\eta'^{(2)}=\dfrac{\eta^{(2)}}{h_0}$，$\cdots$，$\phi'^{(1)}=\dfrac{\phi^{(1)}}{h_0v_{p0}},\phi'^{(2)}=\dfrac{\phi^{(2)}}{h_0v_{p0}}$，$\cdots$である．また、$y=0$の近傍ではBoussinesqのTaylor展開を用いる．

Keyword : 波動方程式，浅水流，転波列，運動量補正係数

〒 468-8502 愛知県名古屋市天白区塩釜口 1-501 Tel: 052-832-1151

無次元基礎方程式の摂動展開はラプラス方程式，水底条件式および水面条件式については明らかにされているので，運動方程式 (8) ついて記すと次式のようである．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\phi'}{\partial t'} + \frac{1}{2}(2\beta-1)\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x'}\right)^2 - {c_0}'^2\tan\theta\, x' + {c_0}'^2(1+\eta') \\
&\qquad + \tan\theta\frac{{c_0}'^2}{{u_0}'}\phi' + (\beta-1)\int\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x'}\right)^2\frac{\partial\eta'}{\partial x'}dx' \\
&= -\epsilon\left(\frac{\partial\phi'^{(1)}}{\partial\xi'} + \epsilon\frac{\partial\phi'^{(2)}}{\partial\xi'} + \epsilon^2\frac{\partial\phi'^{(3)}}{\partial\xi} + \cdots\right) \\
&\quad + \epsilon^2\left(\frac{\partial\phi'^{(1)}}{\partial\tau'} + \epsilon\frac{\partial\phi'^{(2)}}{\partial\tau'} + \epsilon^2\frac{\partial\phi'^{(3)}}{\partial\tau'} + \cdots\right) \\
&+\frac{1}{2}\epsilon^2(2\beta-1)\left\{\left(\frac{\partial\phi'^{(1)}}{\partial\xi'}\right)^2 + 2\epsilon\frac{\partial\phi'^{(1)}}{\partial\xi'}\frac{\partial\phi'^{(2)}}{\partial\xi'}\right. \\
&\qquad\quad \left. + \epsilon^2\left(\frac{\partial\phi'^{(2)}}{\partial\xi'}\right)^2 + \cdots\right\} \\
&-{c_0}'^2\tan\theta\, x' + {c_0}'^2 \\
&+{c_0}'^2\left(\epsilon\,\eta'^{(1)} + \epsilon^2\eta'^{(2)} + \epsilon^3\eta'^{(3)} + \cdots\right) \\
&+\tan\theta\frac{{c_0}'^2}{{u_0}'}\left\{\epsilon^{\frac{1}{2}}\left(\phi'^{(1)} + \left(\epsilon\eta'^{(1)}\right.\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \epsilon^2\eta'^{(2)} + \cdots\right)\frac{\partial\phi'^{(1)}}{\partial y'} + \cdots\right) \\
&\quad + \epsilon^{\frac{3}{2}}\left(\phi'^{(2)} + \left(\epsilon\eta'^{(1)} + \epsilon^2\eta'^{(2)} + \cdots\right)\frac{\partial\phi'^{(2)}}{\partial y'} + \cdots\right) \\
&\quad \left. + \epsilon^{\frac{5}{2}}\left(\phi'^{(3)} + \left(\epsilon\eta'^{(1)} + \epsilon^2\eta'^{(2)} + \cdots\right)\frac{\partial\phi'^{(3)}}{\partial y'} + \cdots\right)\right\} \\
&\quad + \epsilon^3(\beta-1)\int\left\{\left(\frac{\partial\phi'^{(1)}}{\partial\xi'}\right)^2\frac{\partial\eta'^{(1)}}{\partial\xi'} + 2\epsilon\frac{\partial\phi'^{(1)}}{\partial\xi'}\frac{\partial\phi'^{(2)}}{\partial\xi'}\frac{\partial\eta'^{(1)}}{\partial\xi'}\right. \\
&\qquad \left. + \epsilon\left(\frac{\partial\phi'^{(1)}}{\partial\xi'}\right)^2\frac{\partial\eta'^{(2)}}{\partial\xi'} + \cdots\right\}d\xi' = 0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

摂動展開方程式の ϵ の次数別方程式は，ラプラス方程式，水底での境界条件，水面での流体粒子の条件，運動方程式のそれぞれの摂動展開方程式から次のように得られる．

$O(\epsilon^0)$ 次の項は，

$$- {c_0}'^2\tan\theta\, x' + {c_0}'^2 = 0 \text{ より}, \tan\theta = \frac{1}{x'} \tag{12}$$

$O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$ 次の項は，

$$\frac{\partial^2\phi'^{(1)}}{\partial y'^2} = 0 \quad (13), \qquad \frac{\partial\phi'^{(1)}}{\partial y'} = 0 \quad (y' = -1) \quad (14)$$

$$\frac{\partial\phi'^{(1)}}{\partial y'} = 0 \quad (y' = 0) \tag{15}$$

$$-\frac{\partial\phi'^{(1)}}{\partial\xi'} + {c_0}'^2\eta'^{(1)} + \tan\theta\frac{{c_0}'^2}{{u_0}'}\phi'^{(1)} = 0 \tag{16}$$

$O(\epsilon^{\frac{3}{2}})$ 次の項は，

$$\frac{\partial^2\phi'^{(1)}}{\partial\xi'^2} + \frac{\partial^2\phi'^{(2)}}{\partial y'^2} = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial\phi'^{(2)}}{\partial y'} = 0 \quad (y' = -1) \tag{18}$$

$$-\eta'^{(1)}\frac{\partial^2\phi'^{(1)}}{\partial y'^2} - \frac{\partial\phi'^{(2)}}{\partial y'} - \frac{\partial\eta'^{(1)}}{\partial\xi'} = 0 \quad (y' = 0) \tag{19}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial\phi'^{(2)}}{\partial\xi'} + \frac{\partial\phi'^{(1)}}{\partial\tau'} + \frac{1}{2}(2\beta-1)\left(\frac{\partial\phi'^{(1)}}{\partial\xi'}\right)^2 + {c_0}'^2\eta'^{(2)} \\
&\quad + \tan\theta\frac{{c_0}'^2}{{u_0}'}\left(\eta'^{(1)}\frac{\partial\phi'^{(1)}}{\partial y'} + \phi'^{(2)}\right) = 0
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$O(\epsilon^{\frac{5}{2}})$ 次の項は，

$$\frac{\partial^2\phi'^{(2)}}{\partial\xi'^2} + \frac{\partial^2\phi'^{(3)}}{\partial y'^2} = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial\phi'^{(3)}}{\partial y'} = 0 \quad (y' = -1) \tag{22}$$

$$
\begin{aligned}
&-\eta'^{(2)}\frac{\partial^2\phi'^{(1)}}{\partial y'^2} - \eta'^{(1)}\frac{\partial^2\phi'^{(2)}}{\partial y'^2} - \frac{\partial\phi'^{(3)}}{\partial y'} - \frac{\partial\eta'^{(2)}}{\partial\xi'} \\
&\quad + \frac{\partial\eta'^{(1)}}{\partial\tau'} + \frac{\partial\phi'^{(1)}}{\partial\xi'}\frac{\partial\eta'^{(1)}}{\partial\xi'} = 0 \quad (y' = 0)
\end{aligned}
\tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial\phi'^{(3)}}{\partial\xi'} + \frac{\partial\phi'^{(2)}}{\partial\tau'} + (2\beta-1)\frac{\partial\phi'^{(1)}}{\partial\xi'}\frac{\partial\phi'^{(2)}}{\partial\xi'} + {c_0}'^2\eta'^{(3)} \\
&\quad + \tan\theta\frac{{c_0}'^2}{{u_0}'}\left(\eta'^{(2)}\frac{\partial\phi'^{(1)}}{\partial y'} + \eta'^{(1)}\frac{\partial\phi'^{(2)}}{\partial y'} + \phi'^{(3)}\right) \\
&\quad + (\beta-1)\int\left(\frac{\partial\phi'^{(1)}}{\partial\xi'}\right)^2\frac{\partial\eta'^{(1)}}{\partial\xi'}d\xi' = 0
\end{aligned}
\tag{24}
$$

である．かなり複雑な過程を要するが，ϕ に関して $u_* \ll v_{p0}$ でこの項を無視できるものとし，β が乱流の場合せいぜい $\beta = 1.1$ 程度であることから式 (24) の $(\beta-1)$ の項は 1 オーダ小さな項であるとしてこの項を無視すると次式を得る．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\eta'^{(1)}}{\partial\tau'} + \frac{1}{2}\left(2\beta + 2{c_0}'^2 - 1\right)\eta'^{(1)}\frac{\partial\eta'^{(1)}}{\partial\xi'} - \frac{1}{2}\tan\theta\frac{{c_0}'^2}{{u_0}'}\frac{\partial^2\eta'^{(1)}}{\partial\xi'^2} \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{{c_0}'^2} - 1\right)\frac{\partial^3\eta'^{(1)}}{\partial\xi'^3} = 0
\end{aligned}
\tag{25}
$$

ここで，移動座標系の変換と同様な意味の G-M 変換におけるパラメータ v_{p0} を従来の波動方程式の導出で用いているように $v_{p0} = \sqrt{gh_0\cos\theta}$ とすると，$v_{p0} = c_0$ である．したがって，$c_0' = c_0/v_{p0} = c_0/c_0 = 1$ であるから，式 (25) は次式のようになる．ただし，$\eta'^{(1)}$ を η' で表す．

$$\frac{\partial\eta'}{\partial\tau'} + \frac{2\beta+1}{2}\eta'\frac{\partial\eta'}{\partial\xi'} - \frac{1}{2}\frac{\tan\theta}{{u_0}'}\frac{\partial^2\eta'}{\partial\xi'^2} = 0 \tag{26}$$

これは，相対的に静止している流体の長波の波速による移動座標系からみた水面変動を意味しているとともに，バーガース (Burgers) 方程式と同型である．上式において流速分布形の影響は β として含まれている．また，流れの機構を反映する抵抗則が u_0' に含まれている．この波動方程式 (26) の結果によると $\beta = 1$ に比して乱流の場合 $\beta = 1.1$ 程度であることから，運動量補正係数 β の影響はあまり大きくないといえる．

謝辞：この研究の遂行において愛知工科大学学長・教授 安田孝志先生，京都大学防災研究所教授 中川一先生にご協力を頂きました．ここに記して謝意を表します．