EFGM を用いた直交異方性平板の三次元弾性解析

足利工業大学　正 会 員 ○ 末武　義崇

１．まえがき

変分原理に基づく数値解析手法の一つとして、要素分割を必要としない Element-Free Galerkin 法（EFGM）が知られている。筆者らも、Lagrange の多項式に基づく簡易 EFGM を構築し、梁や薄板の有限変位解析や三次元弾性解析、データ補間等に適用することにより、その有用性を示してきた [1)]。こうした研究の流れの中で、EFGM の適用範囲を拡大していくことも重要な課題である。一方、異方性材料から成る平板についても、従来から多くの研究報告 [2)]がなされている。特に、複合材料で構成された積層板に関する研究が盛んに行われており、FEM などの数値解析的なアプローチ [2)]による解析が多く報告されている。

そこで本研究では、筆者らが構築した簡易 EFGM の数値解析例の蓄積を目的とし、直交異方性材料から成る矩形平板の三次元弾性解析を実施する。変分原理に基づき、等方性平板の解析に適用してきた簡易 EFGM を、直交異方性平板の解析にも適用し得るように再定式化を図る。さらに、Fourier 解析の手法に基づく解析的なアプローチによる計算結果との比較を通じ、EFGM 解析の妥当性について定量的な検討を行う。

２．直交異方性平板の EFGM 解析

直交異方性材料から成る三次元弾性問題に対応する汎関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\Pi = \frac{E_x}{2\tilde{N}}\iiint_V \{\hat{C}_{xx}\varepsilon_x{}^2 + \hat{C}_{yy}\varepsilon_y{}^2 + \hat{C}_{zz}\varepsilon_z{}^2 + 2(\hat{C}_{xy}\varepsilon_x\varepsilon_y + \hat{C}_{yz}\varepsilon_y\varepsilon_z + \hat{C}_{xz}\varepsilon_z\varepsilon_x)\}dxdydz \\ + \frac{1}{2}\iiint_V (G_{xy}\gamma_{xy}{}^2 + G_{yz}\gamma_{yz}{}^2 + G_{xz}\gamma_{xz}{}^2)dxdydz - \iiint_V (\bar{X}U + \bar{Y}V + \bar{Z}W)dxdydz - \iint_{S_\sigma} (\bar{T}_x U + \bar{T}_y V + \bar{T}_z W)dS\end{aligned} \tag{1}$$

ここで、ε および γ は垂直ひずみおよびせん断ひずみを表しており、(U,V,W) は (x,y,z) 3 方向の変位、$(\bar{X},\bar{Y},\bar{Z})$ は 3 方向の物体力、$(\bar{T}_x,\bar{T}_y,\bar{T}_z)$ は力学的境界条件が与えられている物体表面 S_σ における表面力をそれぞれ表している。また、直交異方性材料の材料定数については、x 方向の縦弾性係数を E_x、$x-y$ 平面内におけるせん断弾性係数を G_{xy}、$x-y$ 平面内の力によって生ずる z 方向の伸縮を表す Poisson 比を ν_{xy} のように表示する。この時、式（１）における弾性係数はそれぞれ次式のように表される。

$$\begin{cases}\hat{C}_{xx} \equiv 1-(\alpha_z/\alpha_y)\nu_{yz}{}^2\ ,\ \hat{C}_{yy} = \alpha_y(1-\alpha_z\nu_{xz}{}^2)\ ,\ \hat{C}_{zz} = \alpha_z(1-\alpha_y\nu_{xy}{}^2)\ ,\ \hat{C}_{xy} = \alpha_y\{\nu_{xy} + (\alpha_z/\alpha_y)\nu_{xz}\nu_{yz}\}\ , \\ \hat{C}_{xz} = \alpha_z(\nu_{xz} + \nu_{xy}\nu_{yz})\ ,\ \hat{C}_{yz} = \alpha_z(\nu_{yz} + \alpha_y\nu_{xy}\nu_{xz})\ ,\ \tilde{N} \equiv 1-\alpha_y\nu_{xy}{}^2 - (\alpha_z/\alpha_y)\nu_{yz}{}^2 - \alpha_z\nu_{xz}{}^2 - 2\alpha_z\nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{xz}\end{cases} \tag{2}$$

ただし、$\alpha_y \equiv E_y/E_x$ および $\alpha_z \equiv E_z/E_x$ である。

式(1)で示した汎関数の停留条件から、直交異方性平板の基礎方程式が得られる。簡易 EFGM 定式化の詳細については省略するが、積分点における関数値や微分値を、サポート領域内の節点値によって離散的に表現することで、“ 要素 ”という概念を用いずに離散化された基礎方程式を誘導することができる。

３．直交異方性平板の Fourier 解析

直交異方性材料の Hooke 則を考慮すれば、3 次元の力の釣り合い式と変位－ひずみ関係から、直交異方性平板の基礎方程式として、3 方向の変位 (U,V,W) に関する連立偏微分方程式を誘導することができる。

本研究では、周辺単純支持された矩形平板を解析対象とする。Fourier 解析に際しては、板中央面を $x-y$ 平面に一致させ、(x,y) 2 方向に展開された二重三角級数を仮定する。その際、周辺の境界条件をあらかじめ満足するような級数を比較的容易に選択することができる。仮定した級数を上記の連立偏微分方程式に代入すれば、法線方向座標 z のみを変数とする 3 つの未定関数に関する連立常微分方程式が得られる。板上下面に

キーワード：直交異方性平板，三次元弾性解析，EFGM，Lagrange 多項式，Fourier 解析
〒326-8558　足利市大前町 268-1 足利工業大学 建築・社会基盤学系 TEL：0284-22-5681 FAX：0284-64-1061

おける力学的境界条件を適用し、得られた連立常微分方程式を解けば、3 方向の変位を決定することができる。

4．解析モデル

本研究で解析対象としたモデルは、図 1 に示したような、厚肉の矩形平板である。周辺の幾何学的境界条件は、単純支持平板に相当するように、周辺で z 方向変位 W をゼロとした他、周辺の面と平行な方向の変位をゼロとした。板の縦横比は 1 で正方形とし、幅厚比については極厚板を想定し $t/a=0.5$ とした。材料定数については、$\alpha_y=2.0$、$G_{xy}/E_x=G_{xz}/E_x=0.2$、$G_{yz}/E_x=0.8$、$\nu_{xy}=\nu_{xz}=0.3$、$\nu_{yz}=0.25$ とし、α_z についてのみ $\alpha_z=2.0$（Case 1）または $\alpha_z=3.0$（Case 2）の 2 通りに変化させた。荷重条件についても、上面全体に等分布荷重を作用させた「表面力モデル」と、物体力のみを作用させた「物体力モデル」の 2 通りを考えた。

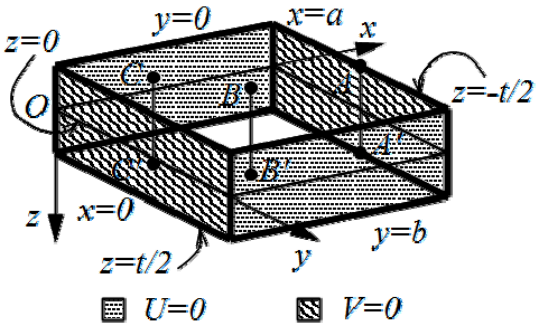


図 1．解析モデル

EFGM 解析にあたっては、総節点数を $11\times11\times11=1331$（均等配置）、サポートパラメータ $\rho=0.6$、Gauss 積分次数 5、セル総数 $5\times5\times5=125$ とした。Fourier 解析については、二重級数の項数を、(x,y) 2 方向共に 150 項とした。図 1 における、3 つの線分に沿った変位や応力の板厚方向分布を計算し、EFGM 解析と Fourier 解析の結果を比較した。

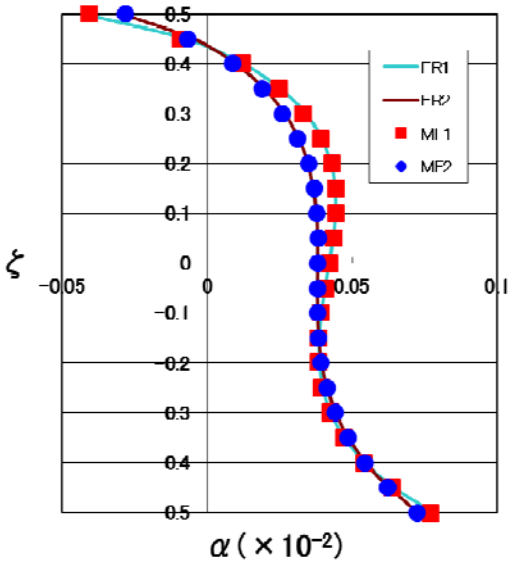
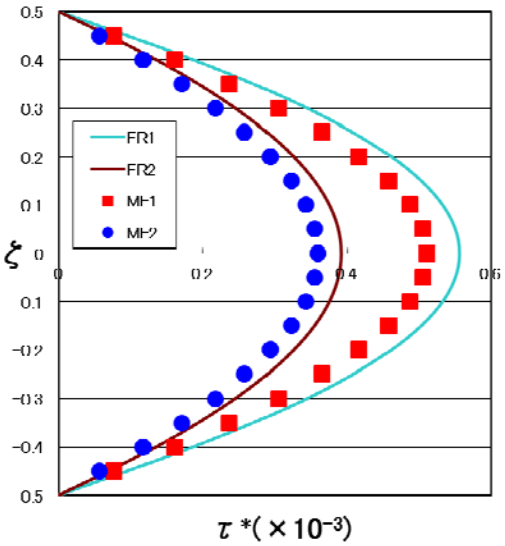


図 2．面内変位分布（表面力モデル）

5．数値計算結果

解析結果を図 2 および図 3 に示す。図 2 は、図 1 の線分 A-A’ に沿った x 方向面内変位の板厚方向分布、図 3 は線分 C-C’に沿った横せん断応力 τ_{zx} の板厚方向分布をそれぞれ表している。図中、プロットは EFGM 解析による計算結果であり、実線は Fourier 解析の結果を表している。凡例の数字 1 および 2 は、それぞれ Case 1 および Case 2 に対応している。両図共に、縦軸には板厚方向の無次元化座標 $\zeta\equiv z/t$ をとり、横軸には図 2 では無次元化変位 $\alpha\equiv U/a$ を、図 3 では無次元化応力 $\tau^*\equiv(\tilde{N}/E_x)\tau_{xz}$ をそれぞれとっている。図 2 には表面力モデルの結果を、図 3 には物体力モデルの結果を代表例として示したが、定性的な傾向は両モデルとも共通している。



2 つの図から明らかなように、EFGM 解析の結果は、Fourier 解析の結果を極めて良好に近似している。横せん断応力の分布には若干の差異が認められるものの、変位分布についてはほぼ一致した結果が得られている。垂直応力の板厚方向分布についても、2 つの解析手法は図上で全く一致した結果を与えている。

6．まとめ

Lagrange の多項式に基づく簡易 EFGM を、直交異方性平板の三次元弾性解析に適用し得るように再定式化した。数値計算の結果、Fourier 解析の結果を良好に近似する解析結果が得られた。

参考文献：1)末武・大須賀・友田: Lagrange 多項式に基づく三次元弾性問題の EFGM 解析，応用力学論文集，Vol.6，，pp.257～266, 2003.8.　2) J. N. Reddy: MECHANICS of LAMINATED COMPOSITE PLATES and SHELLS, 2nd ed., CRC Press, 2004.