

任意の支持条件を有する弾性基礎上の矩形厚板の三次元自由振動解析

大分工業高等専門学校

正 会 員

○名木野晴暢

大同大学

正 会 員

水澤 富 作

北海道大学

F 会 員

三 上 隆

1. まえがき

地上に建設される構造物の挙動は少なからず地盤の影響を受ける。したがって、地盤と構造物の相互作用を考慮した地盤－構造相関問題の一つである弾性基礎上にある構造物の自由振動特性（固有円振動数および固有振動モード）を精確に把握することは重要である。

基本的な構造部材である矩形厚板を対象として、矩形厚板を弾性学的に最も厳正な結果を与える三次元弾性論に基づく弾性体で、地盤を Winkler 型の弾性基礎でモデル化し、弾性基礎上の矩形厚板の三次元自由振動問題を解析した研究報告として文献 1) がある。しかし、この報告¹⁾は解析手法と理論比較に重点が置かれており、弾性基礎の影響を考慮した矩形厚板の自由振動特性が十分に解明されているとは言い難い。

本論文では、弾性基礎上にある矩形厚板の自由振動特性に与える板厚、地盤反力係数および支持条件の影響を明らかにすることを目的としている。なお、解析には B-spline Ritz 法²⁾を用い、自由振動特性の中で最も重要である基本曲げ振動を対象として解析を行った。また、本論文では、矩形厚板の自由振動特性に与える弾性基礎の影響を定量的に評価するための指標についても検討した。

2. 解析モデル

図-1 には、弾性基礎上にある矩形厚板、直交座標系および変位方向の定義が示してある。ここで、三次元弾性論に従う等質・等方な矩形厚板は微小変形かつ線形弾性であるとし、その運動は調和振動を仮定する。また、弾性基礎は Winkler 基礎でモデル化し、これは板下面で滑らかに完全密着しているものとする。なお、 a は板の長さ、 b は幅、 h は厚さ、 k_1 は Winkler 基礎の地盤反力係数であり、時間 t に依存する x, y, z 方向の変位成分は、それぞれ、 $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ で表す。

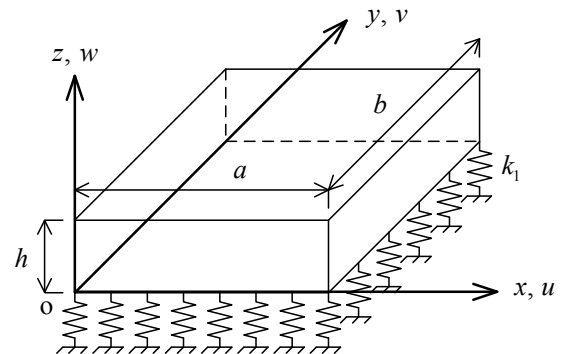


図-1 弾性基礎上にある矩形厚板と直交座標系

3. 弾性基礎上の矩形厚板の三次元自由振動問題

B-spline Ritz 法²⁾を用いれば、弾性基礎上にある矩形厚板の自由振動問題は、次のように定式化される。

$$[(\mathbf{K}) + (\mathbf{K}_F)] - \omega^2 [\mathbf{M}] \{\Delta\} = \{0\} \quad (1)$$

ただし、 ω は地盤－構造系の固有円振動数、 $[\mathbf{K}]$ は矩形厚板の剛性マトリックス、 $[\mathbf{K}_F]$ は弾性基礎の剛性マトリックス、 $[\mathbf{M}]$ は矩形厚板の質量マトリックスであり、 $\{\Delta\}$ は B-spline 関数²⁾の未定係数ベクトルである。

4. 付加剛性係数

式(1)において、固有ベクトル $\{\Delta\}$ の直交性を用いれば、次式を得ることができる。

$$\omega^2 = \frac{\mathbf{K} + \mathbf{K}_F}{\mathbf{M}} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{K}$ は矩形板の一般化された剛性、 $\mathbf{K}_F$ は弾性基礎の一般化された剛性であり、 $\mathbf{M}$ は矩形板の一般化された質量である。これより、次の関係式を得る。

$$\frac{\mathbf{K}_F}{\mathbf{K}} = \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1 \quad (3)$$

ただし、 ω_0 は構造系のみ固有円振動数である。よって、 $\mathbf{K}_F / \mathbf{K}$ は矩形板の一般化された剛性 $\mathbf{K}$ に対する弾性基礎の一般化された剛性 $\mathbf{K}_F$ の割合を表しており、弾性基礎の影響を定量的に評価することができる。本論文では、これを付加剛性係数と呼ぶことにする。

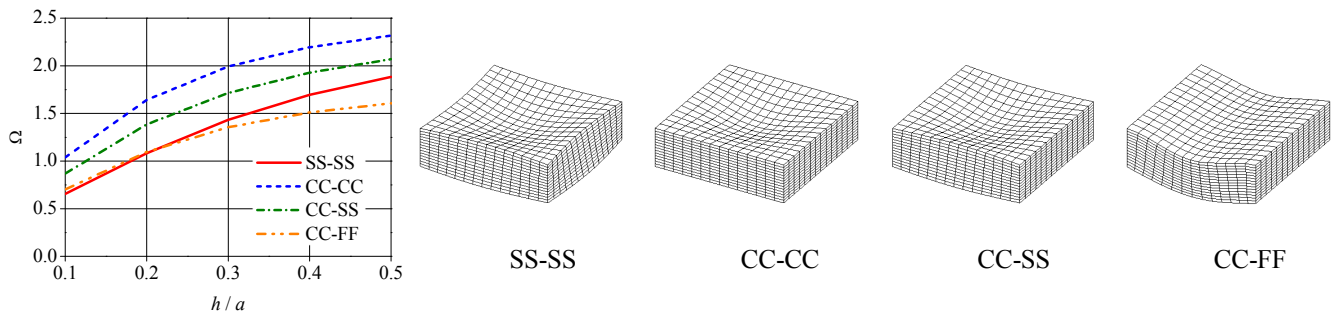


図-1 弾性基礎にある矩形厚板の基本曲げ振動の固有円振動数と固有振動モード： $\Theta = 10^{-2}$

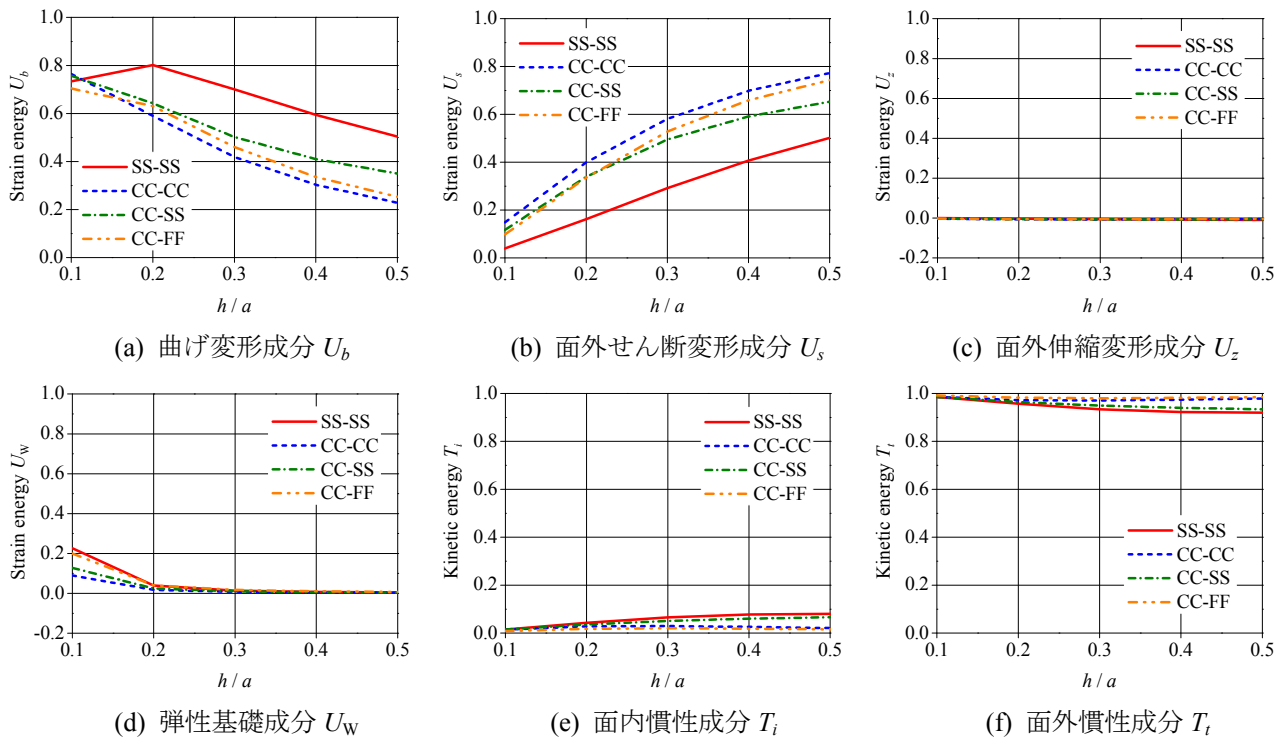


図-2 弾性基礎にある矩形厚板の基本曲げ振動のひずみエネルギーと運動エネルギー： $\Theta = 10^{-2}$

5. 数値計算例および考察

数値計算では、辺長比 $b/a = 1$ およびポアソン比 $\nu = 0.3$ を用いた。なお、固有円振動数 ω と地盤反力係数 k_1 は、次のように無次元化した。

$$\Omega = \omega a \sqrt{\frac{\rho}{E}}, \quad \Theta = \frac{k_1 a}{E} \quad (4)$$

図-1 と図-2 には、弾性基礎にある矩形厚板の基本曲げ振動の固有円振動数と固有振動モード ($h/a = 0.3$) およびひずみエネルギーと運動エネルギーに与える板厚比 h/a と支持条件の影響が示してある。ここで、 Θ の値は文献 3) を参考にして、 $\Theta = 10^{-2}$ に設定した。図-1 より、弾性基礎にある矩形厚板の Ω は支持条件に係らず、 h/a の増大に伴って曲線的に増加する。また、板の拘束が強いほど Ω の値は大きくなる。また、図-2 より、板厚の増大に伴う Ω の曲線的な増大は、面外せん断変形の影響であることがわかる。さら

に、 U_w を指標とすれば、弾性基礎の影響を定量的に評価することもできる。なお、付加剛性係数については当日報告する。

6. あとがき

本論文では、弾性基礎上の矩形厚板の基本曲げ振動に与える板厚と支持条件の影響を明らかにした。また、矩形厚板の自由振動特性に与える弾性基礎の影響を定量的に評価するための指標を提案した。

参考文献

- 1) Zhou et al.: Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.59, pp.1313-1334, 2004.
- 2) Nagino et al.: Journal of Sound and Vibration, Vol.317, pp.329-353, 2008.
- 3) 名木野ら：構造工学論文集, Vol.58A, pp.26-39, 2012.