全面等分布荷重を受ける周面単純支持された傾斜機能矩形厚板の静力学的特性

東海旅客鉄道株式会社　正会員　○石田風人
大分工業高等専門学校　正会員　名木野晴暢
金沢大学　正会員　樋口理宏
豊橋技術科学大学　非会員　足立忠晴

1. まえがき

傾斜機能材料 (Functionally Graded Materials) とは，「空間的に一つの機能から他の機能へと連続的または階段的に変化する一体の材料」と定義されており [1)]，例えば，ある方向の成分傾斜により，材料特性 (縦弾性係数，ポアソン比や密度等) が変化する結合界面が存在しない不均質な複合材料である．

傾斜機能材料は，材料の組み合わせや成分傾斜分布等を制御することで期待する機能を発揮することが可能であり，従来の等質・等方な材料よりも優れた土木構造材料になり得るものと考えられる．また，主要な土木構造部材への傾斜機能材料の積極的な利用にあたっては，傾斜機能材料からなる構造部材の静力学的挙動の解明が不可欠となる．

本論文では，全面等分布荷重を受ける周面単純支持された傾斜機能矩形厚板の変位・ひずみ・応力の板厚方向分布に与える縦弾性係数の不均質性の影響を明らかにすることを目的としている．

2. 基礎方程式と境界条件

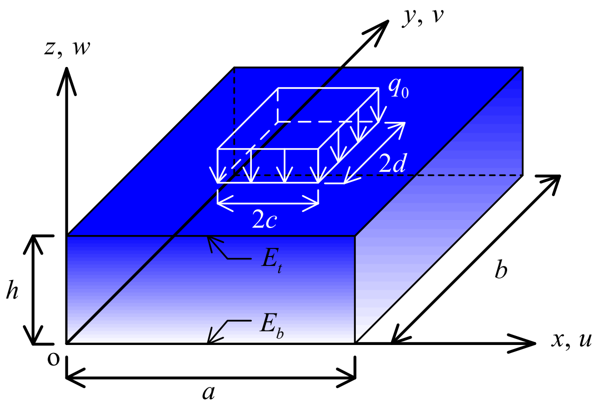
図−1 には，面外荷重を受ける傾斜機能矩形厚板，直交座標系および変位方向の定義が示してある．ここで，a, b, h は，それぞれ，矩形板の長さ，幅，厚さであり，u, v, w は，それぞれ，x, y, z 方向の変位成分である．

周面単純支持された傾斜機能矩形厚板は微小変形かつ線形弾性であるとし，三次元弾性論に基づいて解析する．また，面外荷重 q_0 は表面力として取り扱い，自重 (物体力) の影響は無視する．

傾斜機能材料の不均質性は板厚方向のみに依存するものとし，本論文では縦弾性係数 $E(z)$を次のように仮定する．

$$E(z) = E_b \exp\{p(z/h)\}, \quad p = \ln(E_t/E_b) \tag{1}$$

ただし，E_b と E_t は，それぞれ，矩形板の下面および上面の縦弾性係数であり，p は縦弾性係数比 E_t/E_b に依存する材料の不均質性を表すパラメータである．なお，ポアソン比 ν については一定分布を仮定する．



図−1　面外荷重を受ける傾斜機能矩形厚板，直交座標系および変位方向の定義

三次元弾性論に基づく傾斜機能矩形厚板の基礎方程式は，次のように表される．

$$(\mu_b + G_b)\frac{\partial e}{\partial x} + G_b\left\{\nabla^2 u + \left(\frac{p}{h}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right\} = 0,$$

$$(\mu_b + G_b)\frac{\partial e}{\partial y} + G_b\left\{\nabla^2 v + \left(\frac{p}{h}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right\} = 0,$$

$$(\mu_b + G_b)\frac{\partial e}{\partial z} + G_b\left\{\nabla^2 w + 2\left(\frac{p}{h}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\} + \left(\frac{p}{h}\right)\mu_b e = 0 \tag{2}$$

$$\mu_b = \frac{E_b \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G_b = \frac{E_b}{2(1+\nu)} \tag{3}$$

ここで，∇^2 は Laplacian，e は体積ひずみである．

傾斜機能矩形厚板の周面および上下面での境界条件は，次式で与えられる．

$$v = w = 0, \quad \sigma_x = 0 \qquad (x = 0, \quad x = a) \tag{4}$$

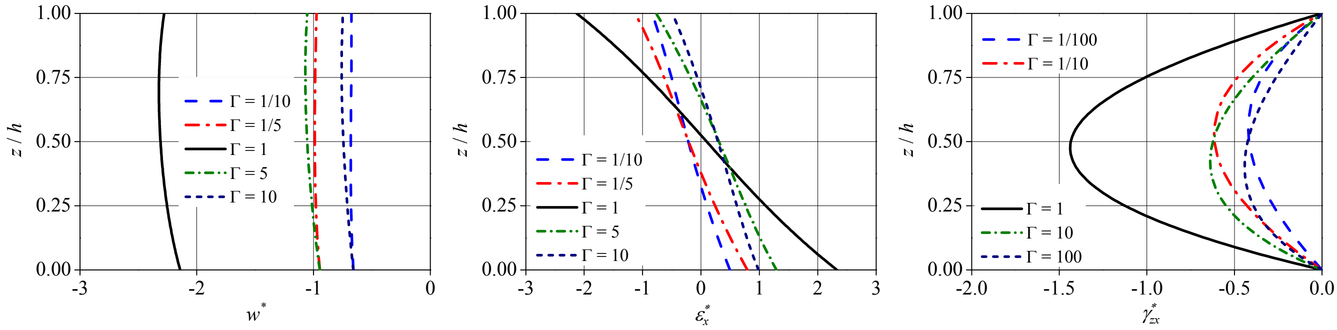
$$u = w = 0, \quad \sigma_y = 0 \qquad (y = 0, \quad y = b) \tag{5}$$

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \qquad (z = 0),$$

$$\sigma_z = -q_0, \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \qquad (z = h) \tag{6}$$

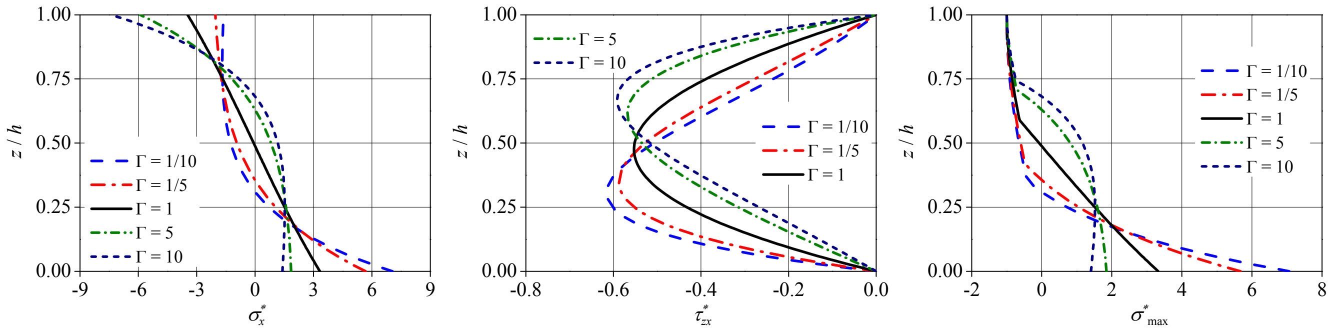
本論文では，Fourier 解析を用いて，傾斜機能矩形厚板の変位・ひずみ・応力の解析解を導出した．

キーワード　傾斜機能材料，矩形厚板，面外荷重，三次元応力解析，弾性論，Fourier 解析
連絡先　〒870-0152 大分市大字牧 1666 番地　大分工業高等専門学校　TEL: 097-552-7691



(a)　Transverse displacement　(b)　Normal strain　(c)　Transverse shear strain

図-2　傾斜機能矩形厚板の面外変位およびひずみの板厚方向分布に与える縦弾性係数比の影響：$h / a = 0.3$



(a)　Normal stress　(b)　Transverse shear stress　(c)　Maximum principal stress

図-3　傾斜機能矩形厚板の応力の板厚方向分布に与える縦弾性係数比の影響：$h / a = 0.3$

3. 理論解析および考察

数値計算では，板中央に荷重載荷幅 $2c \times 2d = a \times b$ なる全面等分布荷重 q_0 が作用するものとし，板厚比 $h / a = 0.3$，辺長比 $b / a = 1$ およびポアソン比 $\nu = 0.3$ を用いた．なお，任意の位置 (x_0, y_0) における面外変位 w，ひずみ ε_x，面外せん断ひずみ γ_{zx}，応力 σ_x，面外せん断応力 τ_{zx} および最大主応力 $\sigma_{\max}$ は，次式のように無次元化している．

$$w^* = \frac{wE_b}{q_0 a},\quad \varepsilon_x^* = \frac{\varepsilon_x E_b}{q_0},\quad \gamma_{zx}^* = \frac{\gamma_{zx} E_b}{q_0},$$

$$\sigma_x^* = \frac{\sigma_x}{q_0},\quad \tau_{zx}^* = \frac{\tau_{zx}}{q_0},\quad \sigma^*_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{q_0} \tag{7}$$

図-2 には傾斜機能厚板の w^*，ε_x^* $(x_0 / a = y_0 / b = 0.5)$ と γ_{zx}^* $(x_0 / a = y_0 / b = 0.2)$ の板厚方向分布に与える縦弾性係数比 $E_t / E_b \equiv \Gamma$ の影響が示してある．これより，傾斜機能厚板は，Γの値に係らず，等質・等方な厚板（$\Gamma = 1$）よりも w^*，ε_x^*，γ_{zx}^* の値を低減することができる．ここで，等質・等方な厚板では $\varepsilon_x^* = 0$ となる位置がほぼ板中央面（$z / h = 0.5$）であるのに対して，傾斜機能厚板では $\varepsilon_x^* = 0$ となる位置が板中央面から高い縦弾性係数側に移動している．他方，等質・等方な厚板の γ_{zx}^* の最大値はほぼ板中央面で生じているのに対して，傾斜機能厚板では γ_{zx}^* の最大値が中央面から低い縦弾性係数側に移動した位置で生じている．

図-3 には傾斜機能厚板の σ_x^*，$\sigma^*_{\max}$ $(x_0 / a = y_0 / b = 0.5)$ と τ_{zx}^* $(x_0 / a = y_0 / b = 0.2)$ の板厚方向分布に与える縦弾性係数比 $E_t / E_b \equiv \Gamma$ の影響が示してある．これより，板の上面と下面の縦弾性係数を入れ替えると，傾斜機能厚板の σ_x^* の板厚方向分布は原点に関してほぼ逆対称な分布となっている．他方，傾斜機能厚板の τ_{zx}^* の板厚方向分布は，板の上面と下面の縦弾性係数を入れ替えてもその分布が単純に反転するだけである．しかし，$\sigma^*_{\max}$ の板厚方向分布は板の上面と下面の縦弾性係数を入れ替える効果が表れており，全面等分布荷重を受ける板上面に高い縦弾性係数を配置すれば，板に生じる $\sigma^*_{\max}$ の最大値を低減することができる．

4. まとめ

傾斜機能矩形厚板では，全面等分布荷重を受ける板上面に高い縦弾性係数を配すことにより，高い材料強度を得ることができ，等質・等方な矩形厚板よりも優れた静力学的特性を有することを明らかにした．

参考文献

1) 上村ら：傾斜機能材料の開発と応用, pp.1-32，シーエムシー出版, 2003.