

弾性拘束された線状構造の収縮による螺旋座屈形態の解析的検討

北海道大学大学院工学院 学生員 ○原澤祥典
 山梨大学大学院医学工学総合研究部 島 弘幸
 北海道大学大学院工学研究院 正 員 佐藤太裕

1. はじめに

梁が軸方向に収縮を起こすことによって生じる荷重によって、梁に曲げ座屈を生じることが一般的に広く知られているところであるが、曲げ部材が拘束を受ける場合諸条件によりその座屈形態が単なる湾曲ではなく螺旋形状をとることがある^{1),2)}。本研究では、弾性拘束されている線状構造が軸方向に一樣に収縮される場合の座屈形態に着目し、そのモードが三次元的な螺旋形態をとる可能性およびその特性を構造力学的に検証することを目的とする。

2. 解析モデル

図 1, 2 は解析対象とする三次元螺旋座屈モデルである。解析モデル 1 は中心部に線状構造を持ち、外縁部全周に亘り弾性拘束を受けている。ここで a は弾性拘束部の半径、 b は座屈後の螺旋半径、 s は螺旋のピッチである。また線状構造部は円形断面を仮定しその直径を d とおく。一方、解析モデル 2 はモデル 1 とは異なり一部分のみ弾性拘束を受けている二重螺旋モデルである。二つの線状構造が中心軸を対称にする形で、単純バネにより連結しているとみなしている。ここでバネの初期長さを b_0 とした。両モデルでは線状構造体が収縮による圧縮力を受けることにより、三次元螺旋座屈を生じる状態を想定している。その形状を記述するパラメータを関数としながら、仮想変位による力学的ひずみエネルギーを最小化する条件により、物理的に再現可能な螺旋構造を決定している。軸方向に均一な収縮を仮定し、線状構造部が形状を保ったまま収縮歪 ϵ だけ生じた時に線状構造部が図 1, 2 に示す通りの三次元螺旋座屈を生じるものとする。

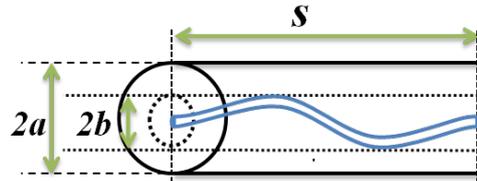


図 1 解析モデル 1

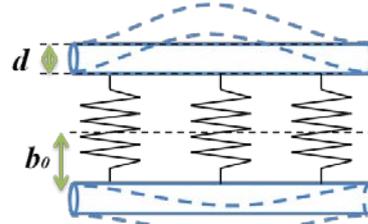


図 2 解析モデル 2

$$E_{strain} = \frac{1}{2} E_g S_g \left[1 - (1 - \epsilon) \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi b}{s} \right)^2} \right]^2$$

ただし E_g は中央部分のヤング率、 S_g は中央部分の断面積、 d は中央部分の直径、 ϵ は外層部分の収縮率である。また b は螺旋の半径、 s は螺旋のピッチである。また、螺旋座屈によって線状構造部は全長に亘って均一な曲率半径を生じる。これにより線状構造部の曲げによるひずみエネルギーは、

$$E_{bend} = \frac{1}{2} E_g I_g \frac{1}{b^2 \left[1 + \left(\frac{s}{2\pi b} \right)^2 \right]^2}$$

で与えられる。ここで曲率半径 R と線状構造部の断面二次モーメント I_g はそれぞれ以下の通りである。

$$R = b \left[1 + \left(\frac{s}{2\pi b} \right)^2 \right], \quad I_g = \left(\frac{\pi d^4}{64} \right)$$

3.2 弾性拘束部の全ひずみエネルギー

弾性拘束部の全ひずみエネルギーは各モデル間で異なる。解析モデル 1 においては螺旋座屈によって線状構造部が中央から b だけ変位し、この時の変形が弾性的かつ全て横断面内のみで行われると仮定すると、図 3 のような全周に亘るバネモデルとなる。この時弾性拘束部のひずみエネルギー $E_{elastic}^1$ は以下のように表される。

$$E_{elastic}^1 = k \left[\pi(b^2 + 2a_1^2) - 4a_1(b + a_1)E \left(\frac{2\sqrt{ba_1}}{b + a_1} \right) \right]$$

ただし各値は以下の通りである、

$$E(\varphi) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varphi^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (\text{第 2 種完全楕円積分})$$

3. 螺旋座屈モデルの力学的ひずみエネルギー

本モデルでは図 1, 2 にそれぞれ示している通り、線状構造部と弾性拘束部の二つに分けられている。ここで本モデルでは螺旋形成にかかわるひずみエネルギーを(1)線状構造部に作用する軸方向圧縮ひずみエネルギー E_{strain} 、(2)線状構造部の曲げによるひずみエネルギー E_{bend} 、(3)弾性拘束部のひずみエネルギー $E_{elastic}$ 、の三つの総和によって決定される。

3.1 線状構造部の全ひずみエネルギー

線状構造部の力学的ひずみエネルギーは二モデル共通であり、軸方向に収縮率 ϵ だけ圧縮された場合を考える。この時線状構造部は初期長から螺旋形状長になる為圧縮ひずみエネルギーが発生する。よって単位長さ辺りのひずみエネルギー E_{strain} は以下のように表される。

キーワード 三次元螺旋座屈, 座屈, 弾性拘束, 螺旋, ひずみエネルギー

連絡先 〒060-8628 北海道札幌市北区北十三条西八丁目 北海道大学工学院工学研究科 TEL:011-706-6177

$$k = \frac{1}{2} \left(\frac{2a+d}{2a-d} \right) E_s$$

(内層部の円周方向単位角あたりのバネ定数)

E_s : 内層部のヤング率

$$a_1 : a - \frac{d}{2} \quad (a : \text{内層部半径})$$

一方, 解析モデル2のモデルにおける弾性拘束部のひずみエネルギーは単純バネの持つエネルギーと同じである. 従ってモデル2のひずみエネルギー $E_{elastic}^2$ は以下の通りに表される.

$$E_{elastic}^2 = \frac{1}{2} k (b - b_0)^2$$

ただしモデル2におけるバネ定数 k は以下で与えられる.

$$k = \frac{d}{b_0} E_s$$

3.3 全ひずみエネルギー

これら力学的エネルギーの総和に対し無次元量として

$$S = \frac{s}{d}, \quad B = \frac{b}{d}, \quad B_0 = \frac{b_0}{d}, \quad A = \frac{a}{d}, \quad \alpha = \frac{E_s}{E_c}$$

の値を導入したものを改めてエネルギーの総和 E_{total} とすると, 解析モデル1の場合は以下の通りとなる.

$$E_{total} = \frac{\pi}{8} \left[1 - (1 - \varepsilon) \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi B}{S} \right)^2} \right]^2 + \frac{\pi}{128} \frac{1}{B^2} \left(\frac{2\pi B}{S} \right)^4 \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2\pi B}{S} \right)^2 \right]^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2A+1}{2A-1} \right) \left[\pi (B^2 + A_1^2) - 4A_1 (B + A_1) E \left(\frac{2\sqrt{BA_1}}{B + A_1} \right) \right] \alpha$$

また解析モデル2についても同様にして,

$$E_{total} = \frac{\pi}{8} \left[1 - (1 - \varepsilon) \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi B}{S} \right)^2} \right]^2 + \frac{\pi}{128} \frac{1}{B^2} \left(\frac{2\pi B}{S} \right)^4 \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2\pi B}{S} \right)^2 \right]^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{B_0} \right) (B - B_0)^2 \alpha$$

ここで物理的に再現可能な螺旋形状のパラメータ, 螺旋半径 b と螺旋ピッチ s はエネルギー最小の原理より

$$\frac{\partial E_{total}}{\partial b} = \frac{\partial E_{total}}{\partial s} = 0$$

を解くことで二モデル共に決定される. 本研究では上記式を数値計算により解くことで各種パラメータと収縮率 ε の関係を求めた.

4. 解析結果とまとめ

解析モデル1における弾性拘束部の半径比 A と, 解析モ

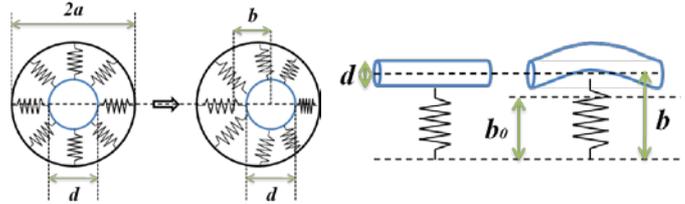


図3 解析バネモデル1

図4 解析バネモデル2

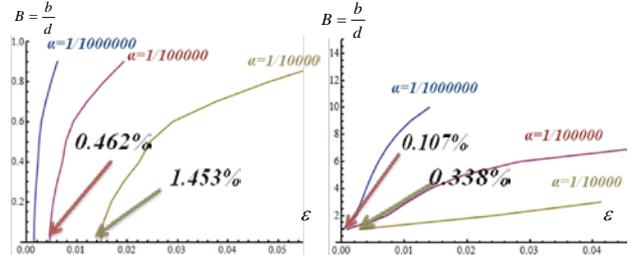


図5 螺旋半径比 B と収縮率 ε の関係 (右: モデル1, 左: モデル2)

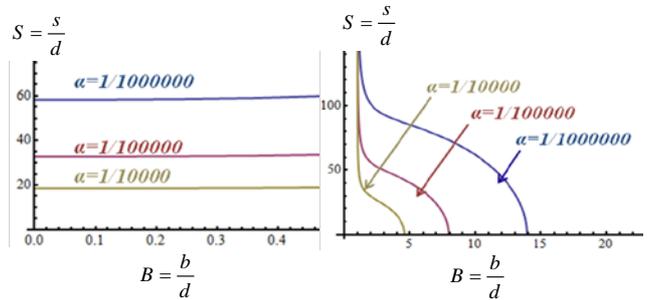


図6 螺旋半径比 B とピッチ比 S の関係 (右: モデル1, 左: モデル2)

デル2における B_0 をそれぞれ1と固定し, ヤング率比 α は 1.0×10^{-6} から 1.0×10^{-4} まで10倍ずつ動かした時の, 収縮率 ε , 螺旋半径比 B とピッチ比との関係を見たものが図5, 図6である.

この結果から以下の知見が得られた.

- 解析モデル1では収縮率 ε が一定値(限界収縮比)を超えると急激に螺旋半径が増大する³⁾が, モデル2では螺旋半径は非常に早期から緩やかに増加する.
- 解析モデル1では螺旋半径が増加してもピッチ比は殆ど一定だが, モデル2ではピッチ比は減少する.
- 両モデルにおいてヤング率比 α が増加するとピッチ比, 螺旋半径比の増加率は共に減少する.
- 両モデルにおいてヤング率比 α が増加すると限界収縮比 ε の値は増加し座屈しづらくなる.

参考文献

- 1) G.G. Chassie, L.E. Becker and W.L. Cleghorn: Helical buckling of a whirling conducting rod in a uniform magnetic field, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol.47, pp.38-53, 2012.
- 2) N.C. Huang and P.D. Pattillo: Helical buckling of a tube in an inclined wellbore Original International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol.35, pp. 911-923, 2000.
- 3) Shigeru TANAKA: Fiber Coating Structure and Buckling due to Contraction, 電子通信学会論文誌 Vol.J68-B, No.9, 1985/9