

積分核に依存しない 演算子積分時間領域高速多重極境界要素法

○群馬大学大学院 正会員 斎藤隆泰
群馬大学大学院 学生会員 増村佳大

1. はじめに

時間領域境界要素法の数値安定化を目的に、演算子積分時間領域境界要素法¹⁾が開発され、工学の様々な問題に適用されてきた。演算子積分時間領域境界要素法は、陰解法であり、大規模問題を解く場合に、計算効率を如何に向上させるかが実用的に重要な課題となる。このことから、大規模問題を高速に解くためのアルゴリズムである高速多重極法を、演算子積分時間領域境界要素法に適用した演算子積分時間領域高速多重極境界要素法の開発が進み、計算効率を軽減させる試みが行われてきた。しかしながら、通常、高速多重極法では、境界要素法で用いる積分核(基本解)の多重極展開が必要となることから、異方性弾性波動問題のような閉じた形の積分核が得られない場合は、適用が困難である。そこで、本研究では、積分核の形式に依存しない高速多重極法を開発し、演算子積分時間領域境界要素法に適用することを行う。

2. 演算子積分時間領域境界要素法

(1) 時間領域境界積分方程式

以下では、2次元波動伝搬問題に対する演算子積分時間領域境界要素法を例に、積分核に依存しない高速多重極法を適用することを考える。図1のような2次元無限領域中に存在する散乱体 D に対する入射波 p^{in} の散乱問題を対象とする。ただし、変位 u やその法線方向勾配である $t = \partial u / \partial n$ といった物理量は、波動が到達するまでは一切の擾乱が起らない静止過去の条件を満足するものとする。このとき、時間領域境界積分方程式は次のように書ける。

$$Cp(\mathbf{x}) = u^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int_S G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * t(\mathbf{y}) dS_y - \int_S H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * u(\mathbf{y}) dS_y \quad (1)$$

ここで、 C は自由項²⁾で、 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$, $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ はそれぞれ2次元波動伝搬問題における時間領域基本解および対応する二重層核である。また $*$ は時間に関する畳込み積分を表す。通常は、時間領域基本解 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$, $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ を直接用いた時間ステップ解法を用いることで、式(1)における時間領域境界積分方程式の離散化を行う。しかしながら、本研究では、より高い数値安定性を求めて、式(1)を Lubich が提案した演算子積分法(CQM: Convolution Quadrature Method)³⁾を用いて離散化する。

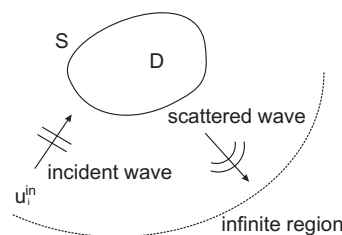


図1 解くべき問題。

(2) 演算子積分法の適用

Lubich は、畳込み積分 $f * g(t)$ を、 f のラプラス変換を用いて離散化近似することにより、数値的に安定に計算する方法を提案した。今、式(1)において、時間増分を Δt 、境界 S を M 個の境界要素(要素内で変位や表面力は一定と仮定した選点法を採用)で離散化し、演算子積分法を適用すれば、次の式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u(\mathbf{x}, n\Delta t) &= u^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) \\ &+ \sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=1}^n [A^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) t^\alpha(k\Delta t) \\ &\quad - B^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) u^\alpha(k\Delta t)] \end{aligned} \quad (2)$$

ただし A^m および B^m は影響関数であり、

$$A^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_S \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dS_y \quad (3)$$

$$B^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_S \hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dS_y \quad (4)$$

で表わされる。式(3), (4)中の s_l は $s_l = \delta(\zeta_l)/\Delta t$ であり $L, \mathcal{R}, \delta(\zeta_l)$ は演算子積分法のパラメータである³⁾。一方、 $\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$, $\hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ はラプラス変換域における2次元波動問題における基本解および二重層核である。式(2)で初期条件、境界条件を考慮し、計算対象となる時刻の未知量を左辺、既知量および過去の境界データを右辺に移項し、第1ステップより順次計算することで境界未知量を求めることができる。しかしながら、式(2)の右辺の行列ベクトル積の計算量は、要素数の増加に伴い膨大となる。そこで、本研究では、式(2)の右辺を効率的に計算するために、積分核に依存することのない新しい高速多重極法を適用する⁴⁾。

3. 積分核に依存しない高速多重極法

以下、積分核に依存しない高速多重極法について説明する。ここでは、紙面の都合上、高速多重極法の構成の基礎と

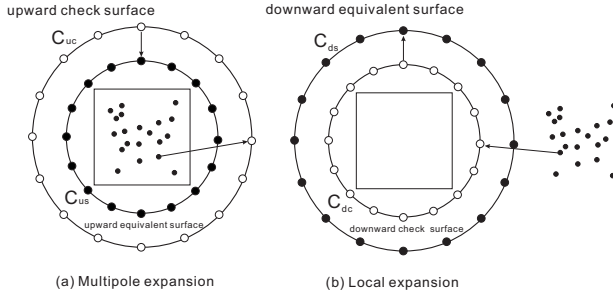


図2 積分核に依存しない高速多重極法における (a) 多重極展開と (b) 局所展開.

なる多重極展開や局所展開を中心に説明する.

(1) 疑似多重極展開

今, 積分核に依存しない高速多重極法を構成するために, 次のような疑似多重極展開を導入する. まず, 図 2-(a) のように高速多重極法におけるセルを囲む円 (C_{us} :upward equivalent surface) を考え, 円周上に p 個の点を取って円周の外部の波動場を疑似多重極係数 $M_i(C_{us})$ を用いて,

$$u(\mathbf{x}) = \sum_i^p \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i) M_i(C_{us}) \quad (5)$$

で表す. 外部の和は積分核の重ね合わせであるから, 当然, 支配方程式を満足する. 式 (5) が, セル内部のソースによる外部の場として満足するために,

$$u(\mathbf{x}) = \sum_i^{n_{cell}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i) \sigma_i \quad (6)$$

をセル外部の円 (C_{uc} :upward check surface) 上で近似的に満足させる. 円 C_{uc} 上に q 個の点 ($q \geq p$) を取り, その上で, 式 (5) と式 (6) が等しいとすれば, 疑似多重極係数 M_i を決定する次の方程式を得ることができる.

$$\sum_j^p G(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j) M_j(C_{us}) = \sum_k^{n_{far}} G(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_k) \sigma_k, \quad \mathbf{x}_i \in C_{uc} (i = 1, 2, \dots, q) \quad (7)$$

式 (7) は円 C_{uc} 上で Dirichlet 条件が与えられた外部問題を一重層ポテンシャルを用いた仮想境界法で解く問題と等価である. 式 (7) 中の $M_j(C_{us})$ は通常的高速多重極法における多重極モーメントに相当する. この場合の多重極モーメントは, 従来的高速多重極法のように積分核を多重極展開して求めたわけではないことに注意する. $p = q$ の場合には, 式 (7) 左辺の係数行列 $G(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$ を LU 分解しておけば, 容易に多重極モーメント M_i を求めることができる. 一方, $p < q$ の場合でも, 係数行列の特異値分解を求めておけば容易に計算可能である. 通常, 係数行列となる $G(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$ は同じレベルのセルでは全て同じであるので, LU 分解や特異値分解は各レベルにおいて一度だけ計算しておけばよい.

(2) 疑似局所展開

疑似多重極展開と同様に, 疑似局所展開について定義しておく. 図 2-(b) のように, セルを含む大きな円 (C_{ds} :downward equivalent surface) をとり, その円周上の p 個の点を考える. このとき, 疑似局所展開として

$$u(\mathbf{x}) = \sum_i^p G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i) L_i(C_{ds}) \quad (8)$$

を定義する. 式 (8) は式 (5) と同様, 支配方程式を満足する. セル C_{ds} の内部でセルを囲む位置に円 (C_{dc} :downward check surface) をとる. この円 C_{dc} 上で外部のソースからの影響を近似的に満足させることを考えれば, 局所展開係数 L_i は次の式を解くことで求めることができる.

$$\sum_j^p G(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j) L_j(C_{ds}) = \sum_k^{n_{far}} G(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_k) \sigma_k, \quad \mathbf{x}_i \in C_{dc} (i = 1, 2, \dots, q) \quad (9)$$

実際の計算では, 式 (9) の右辺を直接計算する必要はない. 本概要では省略するが, 疑似 M2L や疑似 L2L を使って式 (9) 中の局所展開係数 L_i を決定することとなる.

高速多重極法の構成に必要な疑似 M2M, 疑似 M2L, 疑似 L2L 等の展開係数の移動公式は式 (7) や (9) を用いれば容易に導くことができる. 多重極係数や局所展開係数の効率的な計算アルゴリズムは, 高速多重極法と同様である.

4. まとめ

本研究では, 演算子積分法時間領域境界要素法に積分核に依存しない高速多重極法を適用することを行った. 提案する解析手法の長所は, 以下の通りである.

- 現時点で最も容易に構成可能な高速多重極法であると思われる.
- 3次元解析では特に有効と成り得る. 特に波動問題では Wigner-3j symbol をはじめ, 登場する多くの特殊関数の使用を回避できる. このメリットは大きい.
- 積分核に依存しないため, 異方性弾性波動問題等のような閉じた基本解を得られない複雑な問題に対しても有効である.

今後は, 本手法を異方性弾性波動問題へと適用することを行う. なお, 疑似 M2M や疑似 M2L 等の詳細や, 解析結果については当日発表する予定である.

参考文献

- 1) 斎藤隆泰・廣瀬壮一・福井卓雄: 演算子積分法を用いた時間領域境界要素法の開発と超音波非破壊評価への応用, 計算数理工学論文集, vol.6-2, pp.109-114, (2006).
- 2) 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, (2000).
- 3) Lubich, C.: Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*, **52**, pp. 129-145, (1988).
- 4) Ying, L., Biros, G. and Zorin, D.: A kernel-independent adaptive fast multipole algorithm in two and three dimensions, *J. Comput. Phys.*, **196**, pp.591-626, (2004).