異方性材料の面外波動問題に対する演算子積分時間領域境界要素法

○東京工業大学大学院 学生会員 古川 陽
群馬大学大学院 正会員 斎藤隆泰
東京工業大学大学院 正会員 廣瀬壮一

1. はじめに

演算子積分時間領域境界要素法は，従来の時間領域境界要素法に比べて安定に解を求めることができ，これまで様々な問題に適用されてきた．本稿では，異方性材料の面外波動問題に対して，演算子積分時間領域境界要素法を適用し，その有効性を検討する．なお，本稿で取り扱う異方性材料は，材料の力学的性質が対称となる面を1つ以上有するものに限定する．この様な断面を伝播する弾性波動は，面内波動 (qP，qS1 波) と面外波動 (qS2 波) を，それぞれ独立に考えることができ，一般的な異方性を考慮する問題に比べて，取り扱いが容易となる．

2. 異方性材料中の弾性波動の基礎式

以下では，異方性材料中の x_1–x_3 断面を伝播する面外波動について考え，特に断りのない限り，ローマ字で表示される添え字は1および3をとり，添え字に関しては総和規約を適用する．このとき，面外波動問題に対する Christoffel 方程式は，次式で与えられる．

$$\Gamma_{22}(\mathbf{p}) - \rho c^2 = 0,\ \Gamma_{22}(\mathbf{p}) = C_{2j2l}p_j p_l \tag{1}$$

ここに，$\Gamma_{ik}(\mathbf{p})$ は Christoffel テンソル，ρ および C_{ijkl} は，異方性材料の密度および弾性定数を表す．また，$\mathbf{p} = \{p_i\}^{\mathrm{T}}$ および c は，qS2 波の伝播方向および位相速度を表す．式 (1) より，qS2 波の位相速度 c は，波動の伝播方向 p_i によって決定されることがわかる．

3. 演算子積分時間領域境界要素法

領域を D，境界を S とする均質で異方性を有する線形弾性体の入射波による散乱問題を考える．このとき，境界 S は滑らかであり，境界 S に入射波が到達するまでは静止過去の条件を満足するものとすると，時刻 t において，以下に示す時間領域境界積分方程式が得られる．

$$\begin{aligned}\alpha u(\mathbf{x},t) =& u^{\mathrm{in}}(\mathbf{x},t) + \int_S U(\mathbf{x},\mathbf{y},t) * t(\mathbf{y},t) dS(\mathbf{y}) \\ &- \int_S W(\mathbf{x},\mathbf{y},t) * u(\mathbf{y},t) dS(\mathbf{y})\end{aligned} \tag{2}$$

ここに，$u(\mathbf{x},t)$，$u^{\mathrm{in}}(\mathbf{x},t)$ はそれぞれ全変位および入射波の変位を表し，$t(\mathbf{x},t)$ は表面力成分を表す．また，α は自由項であり，$*$ は時間に関する畳み込み積分を表す．なお，$U(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$，$W(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$ は，2次元異方性弾性波動問題における時間領域基本解および対応する二重層核を表す．

式 (2) において $\mathbf{x} \in S$ とし，その後，時間に関しては演算子積分法[1)]，空間に関しては選点法を用いた離散化を行う．このとき，空間に関する形状関数を区間一定の関数で与えると，第 n ステップにおける離散化された境界積分方程式は，次式で表現できる．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}u_M^{(n)} = u_M^{\mathrm{in}(n)} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{N=1}^{N_e}\left[A_{MN}^{(n-k)} t_N^{(k)} - B_{MN}^{(n-k)} u_N^{(k)}\right], \\ &(M = 1,2,\cdots,N_e,\ n = 1,2,\cdots,N_t)\end{aligned} \tag{3}$$

ここに，N_t は総時間ステップ数，N_e は境界要素数を表す．また，$A_{MN}^{(m)}$，$B_{MN}^{(m)}$ は影響関数を表し，次式で与えられる．

$$A_{MN}^{(m)} = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\left[\int_{S^N} \hat{U}(\mathbf{x}^M,\mathbf{y},s_l) dS(\mathbf{y})\right] \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} m \frac{l}{L}} \tag{4}$$

$$B_{MN}^{(m)} = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\left[\int_{S^N} \hat{W}(\mathbf{x}^M,\mathbf{y},s_l) dS(\mathbf{y})\right] \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} m \frac{l}{L}} \tag{5}$$

ここに，i は虚数単位，$s_l = \gamma(z_l)/\Delta t$ であり，Δt は時間増分を表す．$\gamma(z_l)$ は線形多段法における生成多項式の商であり，$z_l = \mathcal{R}\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} l/L}$ である．なお，$\mathcal{R}$ は演算子積分法のパラメータであり，目標とする精度 ϵ を用いて $\mathcal{R} = \epsilon^{1/(2L)}$ で与える．また，$\hat{U}(\mathbf{x},\mathbf{y},s)$，$\hat{W}(\mathbf{x},\mathbf{y},s)$ は，2次元異方性弾性波動問題の Laplace 像空間における基本解およびそれに対応する二重層核を表す．2次元異方性弾性波動問題の Laplace 像空間における基本解は，Wang と Achenbach による時間領域基本解[2)]を直接 Laplace 変換することで得られる[3)]．さらに，面外波動問題の場合は，式 (1) を用いることで，以下に示す様に，基本解および対応する二重層核を，より簡潔に表現することができる．

$$\hat{U}(\mathbf{x},\mathbf{y},s) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{|\mathbf{p}|=1} \frac{\Phi(\mathbf{r},\mathbf{p},s)}{\Gamma_{22}(\mathbf{p})} dL(\mathbf{p}) \tag{6}$$

ただし，$\Phi(\mathbf{r},\mathbf{p},s)$ は，次式で与えられる．

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r},\mathbf{p},s) =& \mathrm{e}^{s\frac{|\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}|}{c}} E_1\left(s\frac{|\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}|}{c}\right) \\ &+ \mathrm{e}^{-s\frac{|\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}|}{c}}\left\{E_1\left(-s\frac{|\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}|}{c}\right) + \mathrm{i}\pi\right\}\end{aligned} \tag{7}$$

Key Words: 時間領域境界要素法，演算子積分法，異方性弾性波動問題
〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1-W8-22 TEL 03-5734-3587 FAX 03-5734-3587

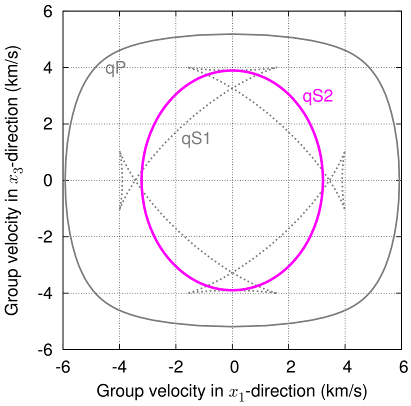

図 1 群速度曲線

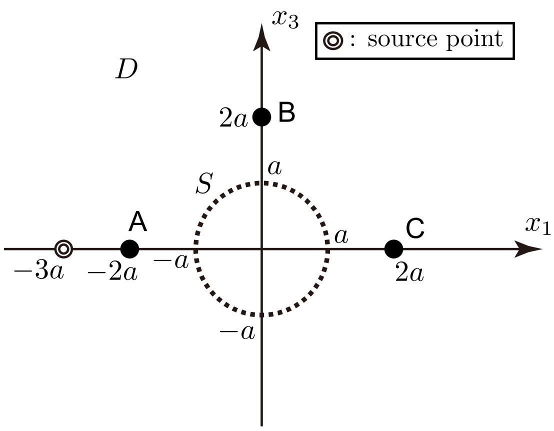

図 2 解析モデル

ここに，$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ であり，$E_1(z)$ は指数積分を表す．また，基本解に対応する二重層核 $\hat{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ は，次式で与えられる．

$$\hat{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = -C_{2j2l} n_j(\mathbf{y}) \hat{U}_{,l}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \tag{8}$$

ここに，$(\ )_{,i} = \partial/\partial x_i$ であり，$n_i(\mathbf{y})$ は境界 S 上の外向き法線ベクトルを表す．

4. 計算精度の確認

解析対象として，横等方性 (六方晶系構造) の金属を考える．この金属の密度は $\rho = 7880$ (kg/m^3)，Voigt 表記による弾性定数は $C_{11} = 276.5$，$C_{12} = 113.5$，$C_{13} = 133.2$，$C_{33} = 212.0$，$C_{44} = 119.6$ (GPa) である．なお，Voigt 表記による弾性定数 C_{IJ} は，式 (1) に示す 4 階の弾性定数 C_{ijkl} に容易に変換できる [3]．この金属の群速度曲線を図 1 に示す．提案手法が対象とする波動は，純面外方向に振動する qS2 波である．同図より，この波動は異方性の影響を受け，楕円状の波面を形成することが確認できる．

図 2 に示す解析モデルにおいて，空洞内部に空洞外部と同様の異方性材料が詰まっている状態を考える．このとき，異方性材料中の全変位 $u(\mathbf{x}, t)$ は，入射波による変位 $u^{\mathrm{in}}(\mathbf{x}, t)$ と等しくなる．本研究ではこの性質を用いて，解析手法の妥当性を検討する．境界 S は 32 個の要素に分割し，総時間ステップ数は $N_t = 512$ とした．なお，入射波による変位 $u^{\mathrm{in}}(\mathbf{x}, t)$ は，次式で与える．

$$u^{\mathrm{in}}(\mathbf{x}, t) = U(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{\mathrm{src}}, t) * t^{\mathrm{src}}(\mathbf{y}^{\mathrm{src}}, t) \tag{9}$$

ここに，$\mathbf{y}^{\mathrm{src}} = \{-3a, 0\}^{\mathrm{T}}$ であり，$t^{\mathrm{src}}(\mathbf{y}, t)$ は入射波を生じさせる表面力成分を表し，次式で与える．

$$t^{\mathrm{src}}(\mathbf{y}, t) = \frac{1}{2}\left\{1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right\} \tag{10}$$

また，$T = 16\Delta t$ および $c^* \Delta t / a = 0.039$ で与えた．ただし，$c^* = \sqrt{C_{66}/\rho}$ である．なお，式 (4)，(5) に示す影響関数および式 (9) に示す入射波の計算には演算子積分法を用いるが，その際に必要となる ϵ や $\gamma(z)$ などのパラメータは文献 [3] を参考にした．

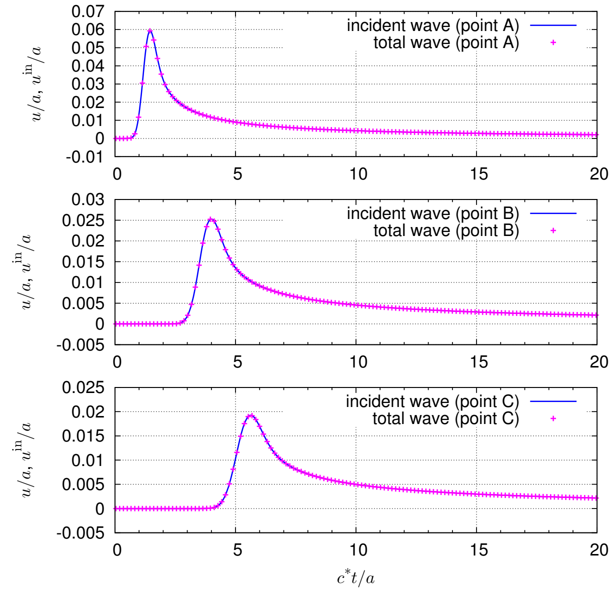

図 3 点 A,B,C における全変位 u および入射波による変位 u^{in} の時刻歴

図 3 に，図 2 の点 A,B,C における全変位 $u(\mathbf{x}, t)$ および入射波による変位 $u^{\mathrm{in}}(\mathbf{x}, t)$ の時刻歴波形を示す．図 3 より，本稿で示す 3 つの観測点における全変位 $u(\mathbf{x}, t)$ と入射波による変位 $u^{\mathrm{in}}(\mathbf{x}, t)$ は概ね一致しており，本手法は数値計算を行う上で，十分な精度を有していることが確認された．

5. おわりに

本稿では，異方性材料の面外波動問題に対する演算子積分時間領域境界要素法の定式化を示した．その後，計算精度の確認を行い，提案手法の妥当性を確認した．今後は，高速多重極法や ACA を用いた計算効率の向上および大規模問題への適用を行う予定である．

参考文献

1) Lubich, C.: Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math*, Vol.52, pp.129–145, 1988.
2) Wang, C.-Y. and Achenbach, J.D.: Elastodynamic fundamental solutions for anisotropic solids, *Geophys. J. Int.*, Vol.118, pp.384–392, 1994.
3) 古川陽, 田中遊雲, 斎藤隆泰, 廣瀬壮一: 2 次元異方性弾性波動問題に対する演算子積分時間領域境界要素法, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol.68, pp.I_269–I_278, 2012.