2次元多重散乱解析に対する演算子積分 時間領域境界要素法のACAによる効率化

○東京工業大学大学院　学生会員　伊海田明宏
群馬大学大学院　正会員　斎藤　隆泰
東京工業大学大学院　正会員　廣瀬　壮一

1. はじめに

近年, Lubich の演算子積分法 (Convolution Quadrature Method, CQM)[1] を用いた時間領域境界要素法に関する研究が, 幅広く行われている. 演算子積分法には, 時間領域境界要素法の解の安定性の向上や, 時間領域基本解が解析的に閉じた形で求まらない問題に対しても適用が可能, といった利点がある. しかしながら, 演算子積分時間領域境界要素法の計算には多大な計算時間とメモリ容量が必要となるため, 大規模計算を行う際には何らかの計算効率化手法が必要となる. これまでは, 著者らのグループで高速多重極法を用いた効率化が検討されてきた[2] が, 本研究では, Adaptive Cross Approximation (ACA)[3] の適用性について検討する. ACA は, 高速多重極法と異なり積分核の多重極展開を必要としないことから, 実装がより簡便であり, また幅広い問題に対して適用が可能である.

以下では, ACA を用いることで計算を効率化した演算子積分時間領域境界要素法について簡単に説明し, 2 次元多重散乱解析を行った結果を示す.

2. 問題の設定

本論文では, 図–1 に示すような等方均質な線形弾性体の無限領域 D における, 2 次元面外波動の初期値・境界値問題を考える. ここでは, 入射波 $u^{\mathrm{in}}(\mathbf{x},t)$ が散乱体 D_c の境界 ∂D に到達した時間を $t=0$ とし, $t<0$ では静止過去の条件を満足すると仮定する. 物体力を無視すれば, 面外変位 $u(\mathbf{x},t)$ が満たす支配方程式および初期条件はそれぞれ次のように表される.

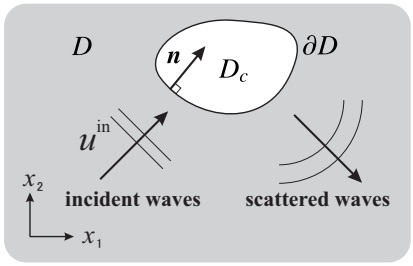
$$\mu\nabla^2 u(\mathbf{x},t)=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\mathbf{x},t)\quad \text{in } D,\ t\geq 0 \tag{1}$$

$$u(\mathbf{x},0)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x},0)=0\quad \text{on } \partial D \tag{2}$$

ここで, μ はせん断弾性定数, ρ は密度である. この問題の解は, 次の時間領域境界積分方程式を解くことにより求まる.

$$C(\mathbf{x})u(\mathbf{x},t)=u^{\mathrm{in}}(\mathbf{x},t)+\int_{\partial D}U(\mathbf{x},\mathbf{y},t)*t(\mathbf{y},t)ds_{\mathbf{y}} -\int_{\partial D}T(\mathbf{x},\mathbf{y},t)*u(\mathbf{y},t)ds_{\mathbf{y}} \tag{3}$$

ここで, $U(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$ および $T(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$ は, それぞれ 2 次元面外波動問題に対する基本解および二重層核, $C(\mathbf{x})$ は自由項である. また, $t(\mathbf{x},t)$ は表面力, $*$ は時間に関する畳込み積分を表す.



図–1 散乱体 D_c による二次 SH 波の散乱

3. 演算子積分時間領域境界要素法

式 (3) を, 時間に関しては演算子積分法, 空間に関しては選点法を用いて離散化する. 時間増分を Δt, 総時間ステップ数を N_t とし, 滑らかな境界 ∂D を N_e 個の一定要素に離散化すれば, 第 n 時間ステップの選点 $\mathbf{x}_i$ についての時間領域境界積分方程式は次のように表される.

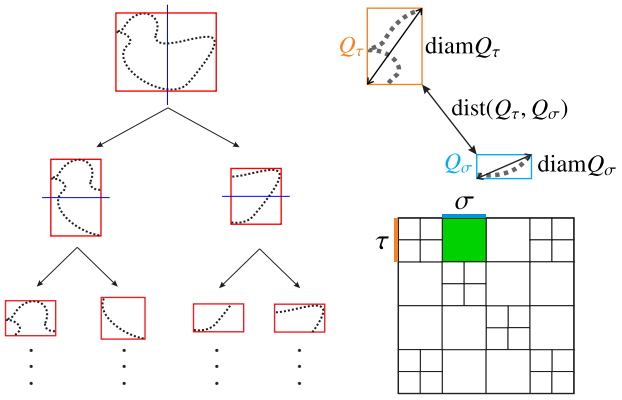
$$\frac{1}{2}u_i(n\Delta t)=u_i^{\mathrm{in}}(n\Delta t) +\sum_{j=1}^{N_e}\sum_{k=1}^{n}\left[A_j^{n-k}(\mathbf{x}_i)t_j(k\Delta t)-B_j^{n-k}(\mathbf{x}_i)u_j(k\Delta t)\right], \quad i=1,2,\ldots,N_e\quad n=1,2,\ldots,N_t \tag{4}$$

ここで, $u_i(n\Delta t)$ および $t_i(n\Delta t)$ はそれぞれ第 n 時間ステップの選点 $\mathbf{x}_i$ における面外変位および表面力である. また A_j^m, B_j^m は影響関数であり, 次式で表される.

$$A_j^m(\mathbf{x}_i)=\frac{\mathcal{R}^{-m}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\left[\int_{\partial D_j}\hat{U}(\mathbf{x}_i,\mathbf{y},s_l)ds_{\mathbf{y}}\right]e^{-2\pi \mathrm{i}m\frac{l}{L}},$$
$$B_j^m(\mathbf{x}_i)=\frac{\mathcal{R}^{-m}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\left[\int_{\partial D_j}\hat{T}(\mathbf{x}_i,\mathbf{y},s_l)ds_{\mathbf{y}}\right]e^{-2\pi \mathrm{i}m\frac{l}{L}} \tag{5}$$

ここで, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$, $s_l=\delta(z_l)/(\Delta t)$ である. $\delta(z_l)$ は線形多段法における生成多項式の商であり, $z_l=\mathcal{R}e^{2\pi \mathrm{i}l/L}$ である. $\mathcal{R}$ は, 目標とする精度 ε を用いて $\mathcal{R}=\varepsilon^{1/(2L)}$ で与える. また $\hat{U}(\mathbf{x},\mathbf{y},s)$ および $\hat{T}(\mathbf{x},\mathbf{y},s)$ は, それぞれ 2 次元面外波動問題に対する Laplace 変換域基本解および二重層核であり, $\hat{U}(\mathbf{x},\mathbf{y},s)=-1/(2\pi)K_0(sr)$, $\hat{T}(\mathbf{x},\mathbf{y},s)=-s/(2\pi)\partial r/\partial n_{\mathbf{y}}K_1(sr)$ と表される. ただし, $r=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ であり, K_n は n 次の第 2 種変形 Bessel 関数である.

Key Words: 時間領域境界要素法, 演算子積分法, *Adaptive cross approximation*
〒 152-8552　東京都目黒区大岡山 2-12-1-W8-22　TEL 03-5734-3587　FAX 03-5734-3587



図–2 (左)：境界要素の分割　(右)：境界要素の集合 τ, σ に対応するクラスタ Q_τ, Q_σ 同士の距離判断, および $\tau \times \sigma$ により定義される部分行列

式 (5) は離散 Fourier 変換の形で表されていることから, L を総時間ステップ数 N_t と等しくなるように設定すれば, 高速 Fourier 変換 (FFT) を用いて式 (5) の計算を高速化することができる. また, 式 (4) の右辺より生成される A_j^m, B_j^m を成分とする係数行列は一般に密行列となる. そこで, 本研究では ACA を用いて行列成分を圧縮することで, 計算時間およびメモリ容量等を削減する手法について検討する.

4. ACA による効率化

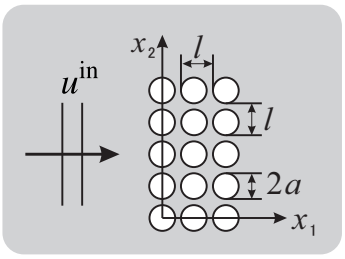
Adaptive Cross Approximation (ACA)[3] は, 次式のような行列の低ランク近似を効率的に求めるアルゴリズムである.

$$\mathbf{M} \approx \mathbf{U}\mathbf{V}^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

ここで, $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{a\times b}$, $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{a\times k}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{b\times k}$ である. また, k は近似のランクであり, 近似の精度 $\varepsilon_{\mathrm{ACA}}$ を与えた際に $\|\mathbf{M} - \mathbf{U}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\|_{\mathrm{F}} \leq \varepsilon_{\mathrm{ACA}}\|\mathbf{M}\|_{\mathrm{F}}$ を満たすように求める. ただし, $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ はフロベニウスノルムを表す. ランク k が $k < ab/(a+b)$ を満たす場合, 行列のサイズが ab から $k(a+b)$ に圧縮される. これにより, 行列成分や行列ベクトル積の計算等に必要な計算コストを削減することができる.

行列成分の値の変動が激しい場合はランクが増大するため, 低ランク近似を係数行列全体に適用しても一般に良い結果は得られない. そこで, 以下に述べる方法により係数行列を部分行列に分割し, 部分行列ごとに近似を行うかを判断することが必要となる. まず, 図–2(左) のように, 境界要素の集合 (クラスタ) についてクラスタを囲う長方形を領域上に定義し, 長方形の長辺側で二分割する. 分割後のクラスタについても, クラスタに含まれる境界要素数が $n_{\min}$ 以下になるまでこの操作を再帰的に実行する. 次に, 図–2(右) のように, クラスタ間の距離に基づく近似許容条件を考えて, 対応する部分行列に近似を適用するか否かを次式を用いて判断する.

$$\min\{\mathrm{diam}Q_\tau, \mathrm{diam}Q_\sigma\} \leq \eta\, \mathrm{dist}(Q_\tau, Q_\sigma) \tag{7}$$



図–3 15 個の散乱体による入射波 u^{in} の多重散乱問題

ここで, Q_τ, Q_σ はそれぞれ境界要素の集合 τ, σ に対応するクラスタ, diamQ_τ はクラスタ Q_τ の径である. また dist(Q_τ, Q_σ) はクラスタ Q_τ, Q_σ 同士の距離であり, $\eta(>0)$ は近似許容パラメータである. 式 (7) を満たすような遠方場からの影響を表す部分行列は, ACA により近似圧縮した形で求める. 一方, 式 (7) を満たさない場合は, 各クラスタの分割後についての式 (7) を考える. ただし, これ以上クラスタを分割できない場合は, 近傍場からの影響を表す部分行列として, 通常通り全ての成分を計算する.

5. 数値解析例

図–3 に示すような, 15 個の散乱体を配置した領域における, 入射波 u^{in} の多重散乱問題を考える. 図–3 において $a = 1.0$, $l = 2.5$ とし, 境界条件および入射波を

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{on } \partial D,\ t \geq 0, \tag{8}$$

$$u^{\mathrm{in}}(\mathbf{x}, t) = u_0(1 - \cos 2\pi\alpha),$$

$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{c_T}{\lambda}\left(t - \dfrac{x_1 + a}{c_T}\right) & \text{for} \quad (0 \leq \alpha \leq 1) \\ 0 & \text{for} \quad \text{otherwise} \end{cases} \tag{9}$$

で与える. $\Delta t = 0.03$ とし, 散乱体一つを 144 個の要素に離散化 ($N_e = 2160$) し, $N_t = 256$ として境界値を計算した. ただし, $u_0 = 1.0$, $\lambda = 2.0$, $c_T\Delta t/a = 0.03$ とし, $\varepsilon = 10^{-10}$, $\varepsilon_{\mathrm{ACA}} = 10^{-6}$, $\eta = 1.0$, $n_{\min} = 20$ とした. ACA を用いることで, 計算時間が従来法の 38.5% となり, 計算に必要なメモリ量が従来法の 14.6% となった. また精度に関しても問題は見られず, 本手法の有効性を確認した.

6. おわりに

Lubich の演算子積分法を用いた 2 次元時間領域境界要素法に ACA を適用する方法について述べた. ACA を用いて密行列を圧縮した形で計算し, 保存することで, 計算時間および必要メモリ量を削減することが出来た. 今後は 3 次元弾性波動問題, 異方性弾性波動問題へと順次適用していく予定である.

参考文献

1) C. Lubich: Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*, 52, pp.129-145, 1988.
2) 福井卓雄, 斎藤隆泰：Lubich の演算子積分法における高速多重極法, 日本シミュレーション学会論文誌, 小特集：境界要素法の新展開, 28(3), pp.17-22, 2009.
3) S. Kurz, O. Rain and S. Rjasanow: The adaptive cross approximation technique for the 3-D boundary element method, *IEEE Transactions on Magnetics*, 38(2), pp.421-424, 2002.