

3次元音響問題に対する演算子積分 時間領域境界要素法のGPUによる高速化

○群馬大学大学院
群馬大学大学院

学生会員
正会員

増村佳大
斎藤隆泰

1. はじめに

時間領域境界要素法の数値安定化を目的に、演算子積分時間領域境界要素法が開発され、工学の様々な問題に適用されてきた。しかしながら、演算子積分時間領域境界要素法は、陰解法であり、大規模問題を解く場合に、計算効率を如何に向上させるかが実用的には大きな問題となる。そこで、本研究では、近年、OpenMPやMPIに次ぐ並列計算手法として非常に注目が集まっているGPUを、演算子積分時間領域境界要素法へ適用する方法について検討する。

2. 3次元音響問題に対する時間領域境界要素法

以下では、3次元音響問題に対する演算子積分時間領域境界要素法を対象に、GPUを用いて高速化することを考える。図1のような3次元無限領域中に存在する散乱体Dに対する入射音響波 p^{in} の散乱問題について考える。ただし、圧力 p やそのフラックス q といった物理量は、波動が到達するまでは一切の擾乱が起こらない静止過去の条件を満足するものとする。このとき、全圧力 $p(\mathbf{x})$ に対する時間領域境界積分方程式は次のように書ける。

$$Cp(\mathbf{x}) = p^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int_S G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * q(\mathbf{y}) dS_y - \int_S H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * p(\mathbf{y}) dS_y \quad (1)$$

ここで、 C はいわゆる自由項で¹⁾、 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ 、 $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ はそれぞれ3次元音響問題における時間領域基本解および対応する二重層核である。また $*$ は時間に関する畳込み積分を表す。通常は、時間領域基本解 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ 、 $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ を直接用いた時間ステップ解法を用いることで、式(1)における時間領域境界積分方程式の離散化を行う。しかしながら、本研究では、より高い数値安定性を求めて、式(1)を演算子積分法を用いて離散化する。

3. 演算子積分法を用いた離散化

本研究では、式(1)の時間領域境界積分方程式を離散化するために、Lubichが提案した演算子積分法(CQM: Convolution Quadrature Method)²⁾を用いる。Lubichは、畳込み積分 $f * g(t)$ を、 f のラプラス変換を用いて離散化近似することにより、畳込み積分を数値的に安定に解く方法を提案した。今、式(1)において、時間増分を Δt 、境界 S を M 個の境界要素(要素内で圧力 p やそのフラックス q は一定と仮定した選点法を採用)で離散化し、演算子積分法を適用すれば、

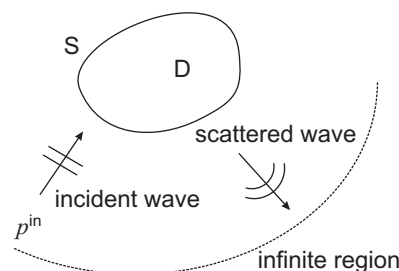


図1 解くべき問題。

次の式を得ることができる。

$$\frac{1}{2}p(\mathbf{x}, n\Delta t) = p^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) + \sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=1}^n [A^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) q^\alpha(k\Delta t) - B^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) p^\alpha(k\Delta t)] \quad (2)$$

ただし A^m および B^m は影響関数であり、

$$A^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_S \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dS_y \quad (3)$$

$$B^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_S \hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dS_y \quad (4)$$

で表わされる。式(3)、(4)中の s_l は $s_l = \delta(\zeta_l)/\Delta t$ であり L 、 $\mathcal{R}$ 、 $\delta(\zeta_l)$ は演算子積分法によるパラメータである²⁾。一方、 $\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ 、 $\hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ はラプラス変換域における3次元音響問題における基本解および二重層核である。式(2)で初期条件、境界条件を考慮し、計算対象となる時刻の未知量を左辺、既知量および過去の境界データを右辺に移項し、第1ステップより順次計算することで境界未知量を求めることができる。

4. GPUによる高速化

GPUを用いて高速化する部分は式(2)における入射波 p^{in} や影響関数 A^m 、 B^m の計算である。式(2)の右辺第二項内の影響関数 A 、 B と境界値 q 、 p それぞれの行列ベクトル積の計算は、形式的に同じであることから、ここでは、 $A^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) q^\alpha(k\Delta t)$ の部分を例に説明する。今、式(2)の $\sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=1}^n A^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) q^\alpha(k\Delta t) (\equiv u_x^{RA, n})$ を第1ステップから順に行列表示すると、次のようになる。

Key Words: 音響問題, 時間領域境界要素法, GPU, 並列化

〒376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1

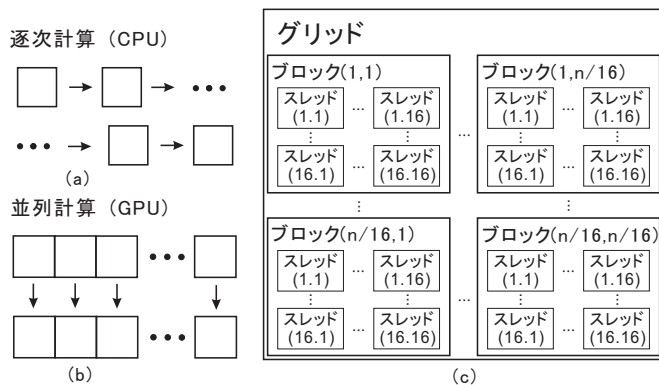


図2 CPU と GPU (a) CPU (b) GPU 計算 (c) GPU の構造

$$\begin{Bmatrix} u^{R_{A,1}} \\ u^{R_{A,2}} \\ u^{R_{A,3}} \\ \vdots \\ u^{R_{A,n}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^0 q^1 \\ A^1 q^1 + A^0 q^2 \\ A^2 q^1 + A^1 q^2 + A^0 q^3 \\ \dots \\ A^{n-1} q^1 + \dots + A^0 q^n \end{bmatrix} \quad (5)$$

ここで、 $u^{R_{A,n}}$ 、 A^n 、 q^n 等は各々の行列またはベクトル表記である。本研究では式(5)中の係数行列 A^n 等の影響係数行列の作成の計算をGPUにより高速化させる。具体的には係数行列 A^n の作成に図2(c)のように、GPUにて 16×16 スレッドの2次元配列のスレッドを作成し、各要素での時間ステップ毎の値を計算する。なお、スレッドはGPUにて計算を行う領域の単位であり、スレッドの集合をブロック、ブロックの集合をグリッドと呼ぶ。CPUによる計算は図2(a)のように計算を一つずつ実行する逐次処理である。それに対し、GPUによる計算は図2(b)のように複数の計算を同時に実行する並列処理である。係数行列 A^n の作成による計算時間は要素数 M が増えるにつれ増加する。境界要素法の計算は係数行列作成に $O(M^2)$ の時間を要する、これは、演算子積分時間領域境界要素法の場合も同様である。そこで、GPUによる計算の高速化を行う。また入射波 p^{in} の計算に対しても 16×16 スレッドにて計算を行った。

5. 計算効率の確認

以下、本研究で実装したGPUを用いた3次元音響問題に対する演算子積分時間領域境界要素法の計算効率について確認する。ここではCPUを用いて通常通り計算を行った場合と、GPUを用いて計算を行った場合の二通りの計算時間の比較を行い、計算効率の向上を検討する。解析では、文献³⁾と同様に、半径 a の球形剛体による入射波の散乱問題を考え、一定要素により離散化して解析を行った。散乱体の境界表面 S における境界条件を $\partial p / \partial n = 0$ で与え、散乱体の要素数 M はそれぞれ、384、768、1152の3通りを設定し、時間増分は $c\Delta t/a = 0.05$ 、 $N = L = 32$ 、 $\mathcal{R} = 0.94746353$ とした。なお、プログラミング言語にはFortranを用い、使用した計算機の性能はメインメモリが16GB、CPUがXEON E5-1620、GPUがTESLA C2070であり、GPUの搭載メモリ

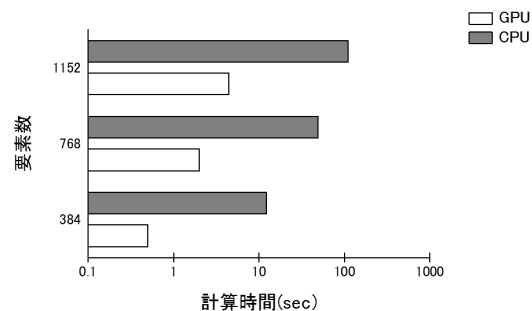


図3 CPU または、GPU を用いた場合の計算時間

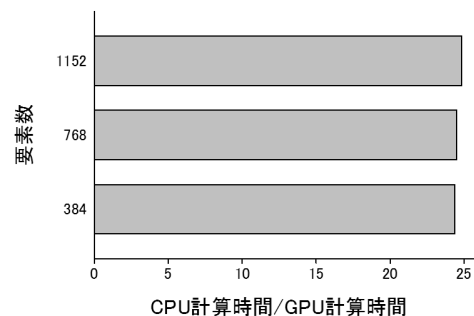


図4 CPU 計算時間 / GPU 計算時間

は6GBである。

図3にCPUまたはGPUを用いた場合の計算時間を、図4に(CPU計算時間)/(GPU計算時間)を示す。ただし、図3は両対数で表示されていることに注意されたい。図3より、要素数の増加に伴い計算時間はおよそ $O(M^2)$ で増加することがわかる。要素数 M はメインメモリの都合上、1152までとしている。また、図4より、GPUを用いた場合の計算効率は向上していることがわかる。要素数の増加に伴う比率の著しい増加はなかったが、計算時間は要素数 $M = 1152$ で24.83倍まで短縮された。よって、GPUによる計算を効率的に実行できた。今回の解析では代数方程式の求解、および行列ベクトル積の計算はCPUにより実行した。そのためこの二カ所をGPUにより計算を行うことでさらなる計算効率の向上が可能であると考えられる。

6. まとめ

本研究では、演算子積分時間領域境界要素法のGPUによる高速化を行った。要素数の異なる散乱体を用いた数値計算によりGPUを用いた場合の計算効率の向上を確認した。今後は、代数方程式の求解、行列ベクトル積等に対してのGPUによる計算高速化、およびMPIを適用したさらなる高速化を行う予定である。

参考文献

- 1) 小林昭一編著：波動解析と境界要素法、京都大学学術出版会、(2000)。
- 2) Lubich, C.: Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*, **52**, pp. 129–145, (1988)。
- 3) 斎藤隆泰・廣瀬壮一・福井卓雄：演算子積分法を用いた時間領域境界要素法の開発と超音波非破壊評価への応用、計算数理工学論文集, vol.6-2, pp.109–114, (2006)。