

自由辺を有する多層版の混合法による数値解析

井 沢 設 計 正会員 ○廣瀬 清泰
 セイフティア일랜드 正会員 鍋島 益弘
 大阪工業大学名誉教授 正会員 堀川都志雄

1. はしがき

変位関数に基づく厚板理論を級数展開することにより、多層版の三次元解析が行われているが、単純支持と異なる境界条件を有する多層版を厚板理論のみで解を得ることは、膨大な計算時間と煩雑な労力を要すると推測される。簡便な方式として、外荷重を忠実に表現できる厚板理論を特解に、境界条件を満足させるために薄板理論を同時解に据える混合法を提案し、局所荷重下での三次元応力や変位が容易に計算できることを示した¹⁾。

本研究ではまず自由辺をもつ多層版の各層に混合法を適用して、層の上下面の変位と応力の関係式を誘導する。次に各層の上下面での3方向の変位を互いに連続させて、界面に働く伝達力を求めて多層版を数値解析する。なお級数計算に際しては一方向(x方向)を調和解析法、他方向(y方向)には選点法を用いる手法(strip法という)を採用する。

2. 混合法による層の解析

混合法では厚板理論による全周単純支持の Navier 解を特解に、境界条件を満たす薄板理論での曲げ問題と引張り問題の解を同時解にもつ一般解による各層の素解を求める。

各層の座標原点を、x軸を支持辺上に、y軸を版の中央線上に、z軸を版の中央面にとる。

特解は Galerkin-vector f_3 と Boussinesq 関数 θ_3 から導かれ、その基礎式と変位との関係式は以下の式で与えられる。

$$\Delta \Delta f_3 = 0, \quad \Delta \theta_3 = 0 \quad (1)$$

$$2\mu u = -\partial_x \partial_z f_3 + \partial_y \theta_3, \quad 2\mu v = -\partial_y \partial_z f_3 - \partial_x \theta_3, \\ 2\mu w = \mu / (\lambda + \mu) [\partial_z^2 + (\lambda + 2\mu) (\partial_x^2 + \partial_y^2) / \mu] f_3 \quad (2)$$

ここで、 $\partial_x = \partial / \partial x$, $\partial_y = \partial / \partial y$, $\partial_z = \partial / \partial z$,

Δ : 3次元ラプラシアン, λ, μ : ラメの定数

変位関数の級数展開は荷重条件と境界条件に合わせて次のように区分される。

- ・中央線に関して正対称性の時

$$f_3 = \sum \sum [C_1 \operatorname{ch} \gamma z + C_2 \operatorname{sh} \gamma z + C_3 \gamma z \operatorname{ch} \gamma z + C_4 \gamma z \operatorname{ch} \gamma z] \sin \alpha_m x \cos \beta_n y, \\ \theta_3 = \sum \sum [C_5 \operatorname{ch} \gamma z + C_6 \operatorname{sh} \gamma z] \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (3)$$

- ・中央線に関して逆対称性の時

$$f_3 = \sum \sum [C_1 \operatorname{ch} \gamma z + C_2 \operatorname{sh} \gamma z + C_3 \gamma z \operatorname{ch} \gamma z + C_4 \gamma z \operatorname{ch} \gamma z] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ \theta_3 = \sum \sum [C_5 \operatorname{ch} \gamma z + C_6 \operatorname{sh} \gamma z] \cos \alpha_m x \cos \beta_n y \quad (4)$$

ここで、 $\alpha_m = m\pi/a$ ($m=1, 2, 3, 4 \dots$), a : x方向のスパン, $\gamma^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2$,

$\beta_n = (2n+1)\pi/b$ ($n=0, 1, 2, 3 \dots$), b : y方向のスパン,

$\beta_n' = 2n\pi/b$ ($n=0, 1, 2, 3 \dots$),

$\operatorname{sh} \gamma z = \sinh \gamma z$, $\operatorname{ch} \gamma z = \cosh \gamma z$,

$C_1 \sim C_6$: 各層の上下面の境界条件から決定される積分定数

キーワード 厚板理論, 多層版, 調和解析, 選点法, strip法, 混合法

連絡先 〒581-0019 大阪府八尾市南小阪合町5丁目8-30 株式会社 井沢設計 TEL072-998-2723 FAX072-998-2768

例えば y 方向の端辺が自由で規定される場合、曲げモーメント M_y と換算せん断力 V_y 、および軸力 N_y と N_{xy} がそれぞれ零となる境界条件で与えられる。この条件式から同時解中の積分定数を層の上下面における柱状の選点分割ブロック j ($j = 1, k$) の伝達力ベクトル $\mathbf{X}^u$ と $\mathbf{X}^l$ で表し、さらに伝達力をブロックの代表点での上下面の変位ベクトル $\mathbf{U}^u$ と $\mathbf{U}^l$ に関連づける。変位の連続条件式より n 層からなる多層版の各界面に働く伝達力に関する $(n-1) \times 3k$ 元の連立方程式を解けば、各層の変位・応力が得られる。

3. 数値計算例

同じ版厚をもつ 3 層の多層版（全厚： h ）が等分布満載荷重 q を受ける例を取上げる。版の諸元をスパン比 $b/a = 1.0$ ，版厚比 $h/a = 0.1$ ，ポアソン比 $= 0.3$ ，弾性係数を E とする。

多層版の自由辺中央点でのたわみ w と上面応力 σ_x の計算結果を表-1 にまとめる。なお相対 2 辺が単純支持で、残りの 2 辺が自由であるサンプル①では式(3)を採用し、相対 2 辺が単純支持、残りが単純支持および自由のサンプル②には式(4)を用いる。

表-1 古典解と本計算との比較 ($x/a = 0.5$)

項 目	サンプル①			サンプル②		
	古典解	10 分割	20 分割	古典解	10 分割	20 分割
$w E/qa$	164.8	169.0	168.2	140.4	147.8	146.0
σ_x /q	-79.08	-77.24	-77.51	-67.20	-64.57	-65.16

次に同様の多層版下面に仮想版（弾性係数が無限大）を設ける。界面での不連続性が導入できる手法²⁾を用いて、仮想版との変位連続を中央線のみで成立させる操作で固定条件を近似し、相対 2 辺が単純支持で、残りが固定と自由の多層版を作る。その結果を表-2 に示す。

表-2 分割数による比較 ($x/a = 0.5$)

項 目	古典解	10 分割	20 分割	30 分割
$w E/qa$	123.4	132.5	129.8	129.1
σ_x /q	-58.32	-57.00	-57.22	-57.39

4. あとがき

古典解との比較を検討すれば、本 strip 法の妥当性が確認できる。今後は部分荷重下での界面応力や各層で y 方向スパンが異なる断面をもつ変厚多層版の挙動を計算する予定である。

参考文献

- 1) 横山他：混合型境界を有する版の厚板理論と混合法による解析，土木学会 第七回道路橋床版シンポジウム 論文報告集，pp.255-262,2012.
- 2) 三上他：二方向アラミド繊維シート補強床版の界面剥離に関する数値解析，土木学会構造工学論文集，Vol.59A,pp.1065-1074,2013.