設計地震動の数が構造物の安全性に及ぼす影響の定量的評価

山梨大学大学院　正　員　○宮本　崇
東京大学大学院　正　員　本田利器

1. はじめに

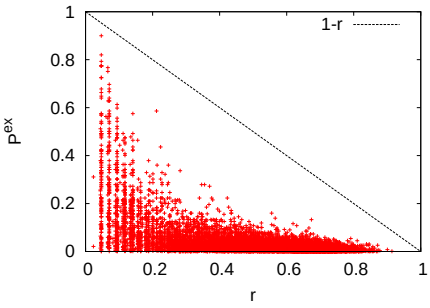
動的解析に基づく構造物の耐震性能照査に用いられる設計地震動の時刻歴波形は，設計用応答スペクトルへのフィッティングや特定の断層震源からの強震動シミュレーションなどの手法から定められることが多い．一方でこれらの手法では，応答スペクトル波形に適合する波形の位相特性の任意性や，強震動シミュレーションにおけるパラメタの不確実性に起因して無数の波形が生成され，どの波形を性能照査に用いるかによって，構造物に保証される安全性もまた異なるという問題が生じる．この問題に対し，例えば道路橋示方書では同一の設計用応答スペクトルを満たす波形を 3 波形程度用いて性能照査を行うことを推奨しているが，それによって保証される安全性の程度については定量的な議論が行われていない．

著者らは，設計地震動が構造物に保証する安全性の程度を，設計地震動の有する情報エントロピーに基づいて推定する手法を提案した[1)]．本稿ではこの手法を応用し，ある条件を満たす設計地震動の候補からランダムに複数の波形を選定した際に構造物に保証される安全性の程度の推定を，選ばれた波形が有する情報エントロピーの値を推定する問題としてとらえる．波形の数が増えるに連れて，構造物に保証される安全性が向上する可能性が高くなる，すなわち波形群の有する情報エントロピー値が大きな値をとる確率が高くなることが予想されるため，後述する Sanov の定理を用いることで，波形の数と情報エントロピーの関係を定式化できることを示し，その妥当性を数値シミュレーションから検証する．

2. 情報エントロピーと構造物の安全性の関係

設計用応答スペクトルなどのある条件を満たす，無数の設計地震動の候補がなす集合を $\boldsymbol{G}$ とおき，$\boldsymbol{G}$ の中から任意に n 波の波形の集合 $\boldsymbol{g}$ を性能照査に用いるとする．このときに構造物に保証される安全性を，$\boldsymbol{G}$ に属する任意の地震動 $f_{\boldsymbol{G}}(t)$ による構造物の応答値 $D_{\boldsymbol{G}}$ が，$\boldsymbol{g}$ に属する地震動 $f_{\boldsymbol{g}}^i(t)(i=1,...,n)$ による応答値 $D_{\boldsymbol{g}}^i$ の最大値を越える確率 $P^{\mathrm{ex}} = P(D_{\boldsymbol{G}} \geq \max_i\{D_{\boldsymbol{g}}^i\})$ によってここでは議論するものとする．

$\boldsymbol{g}$ は $\boldsymbol{G}$ の部分集合であるため，$\boldsymbol{G}$ 中の大きな範囲を占めるような $\boldsymbol{g}$ を性能照査に用いることで P^{ex} は必然的に小さくなり，構造物の安全性は向上すると考えられる．このような発想に基づき，著者らは，$\boldsymbol{g}$ が占める範囲の大きさを波形群の有する情報エントロピー $H_{\boldsymbol{g}}$ に基づいて定量化する手法を提案した[1)]．ここで，集合 $\boldsymbol{g}$ の情報エントロピー $H_{\boldsymbol{g}}$ は，ある波形 $f(t)$ が有する特性をベクトル値の指標 $\boldsymbol{x}$ で表すものとして，$\boldsymbol{g}$ 中の波形 $f_{\boldsymbol{g}}^i(t)$ による $\boldsymbol{x}$ の確率分布 $p_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x})$ の情報エントロピー $H_{\boldsymbol{g}} = -\sum_j p_{\boldsymbol{g}}^j(\boldsymbol{x}) \log p_{\boldsymbol{g}}^j(\boldsymbol{x})$ として定義する．なお，$p_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x})$ は，$p_{\boldsymbol{g}}^j(\boldsymbol{x})$ として離散的に評価している．



図–1 ランダムに設定された 10000 ケースの $\boldsymbol{g}$ における P^{ex} と r の関係

このとき P^{ex} は，$1 - \frac{\exp(H_{\boldsymbol{g}})}{\exp(H_{\boldsymbol{G}})}$ を上限値とした値をとり，$H_{\boldsymbol{g}}$ の増加と共に取り得る値が小さくなることが検証されている．情報エントロピーの指数値は現象の実質的なパターン数を表している[2)]ため，$r = \frac{\exp(H_{\boldsymbol{g}})}{\exp(H_{\boldsymbol{G}})}$ は $\boldsymbol{G}$ 中で $\boldsymbol{g}$ が占める範囲の大きさを，生じうる現象の何割が $\boldsymbol{g}$ 中に含まれているかとして評価した値である．構造物は，全波形の候補の中で直接考慮された r の比率の波形に対しては安全となり，したがって P^{ex} は $1-r$ となることが予想されるが，実際には直接考慮した波形以外にも安全となりうるので，P^{ex} は $1-r$ を上限値としてそれよりも小さな値を取る．

図–1 は，性能照査の対象構造物として非線形 10 自由度系でモデル化される 10 階鉄筋コンクリート造ビルを，設計地震動の候補 $\boldsymbol{G}$ として特定の設計スペクトルにフィッティングされた 1000 波形を想定した条件の下で，ランダムに設定された 10000 ケースの $\boldsymbol{g}$ が有する r と P^{ex} を表しており，上述の P^{ex} と r の関係が現れている．なお，$H_{\boldsymbol{g}}$ の算出に用いる地震動の特性指標 $\boldsymbol{x}$ として，対象構造物の 1 次モードと同じ固有周期を有した完全弾塑性 1 自由度系の最大応答変位と履歴吸収エネルギーを，P^{ex} の算出の際に着目する応答値として，基部のバネの Park-Ang 指標値を用いている．

キーワード: 設計地震動，性能照査型耐震設計，情報エントロピー，Sanov の定理
連絡先: 〒 400-8511 山梨県甲府市武田 4–3–11 山梨大学 工学部土木環境工学科

3. Sanov の定理に基づく波形の情報エントロピー値の推定

(1) 問題設定

大数の法則により，$\boldsymbol{G}$ 中の部分集合 $\boldsymbol{g}$ に属する波形の数 n が大きくなるに連れて，$\boldsymbol{g}$ の確率分布 $p_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x})$ は母集合 $\boldsymbol{G}$ の有する確率分布 $p_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})$ に収束する．これに伴い，n の増加と共に r が小さな値をとる確率は小さくなり，1 へと収束する．これは，設計地震動の数が増えるにつれて，構造物に保証される安全性が向上する可能性が高まることを意味している．

そこで本稿では，$\boldsymbol{g}$ 中の波形の数が n のときに，r がある一定値 c 以下となる確率 $P(r<c)$ を，波形の数 n の関数として導出することを考える．これを導出することによって，情報エントロピーを直接計算することなく波形の数にのみ注目して設計地震動を設定する場合でも，構造物に保証される安全性を定量的に議論することができる．

$P(r<c)$ は，$P(H_{\boldsymbol{g}} < \log(c\cdot\exp(H_{\boldsymbol{G}}))) = P(H_{\boldsymbol{g}} < c')$ と同値である．また，ある確率分布の集合 E を，$E = \{p(\boldsymbol{x}) \mid H[p(\boldsymbol{x})] < c'\}$ として定義すると，$P(H_{\boldsymbol{g}} < c')$ はまた $P(p_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x}) \in E)$ と同値であるため，以降ではこの $P(p_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x}) \in E)$ を n の関数として求める．

(2) Sanov の定理による近似解の導出

標本の数 n が大きくなった場合に，標本分布が大数の法則に従わず母集団分布に収束しない確率を近似的に評価する定理として Sanov の定理が知られている[2]．本稿ではこの定理を利用して，$P(p_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x}) \in E)$，すなわち，波形の数が増えても標本分布の情報エントロピーが母集団分布の値に収束せず低い値をとる確率を定量化する．

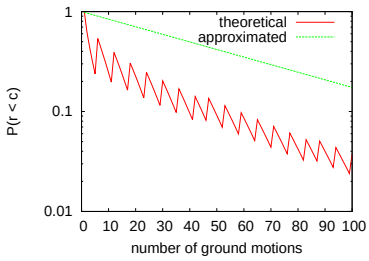
Sanov の定理から，$P(p_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x}) \in E) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(-n * D(p^*(\boldsymbol{x})\|p_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})))$ が成り立つ．ここで，$D(p(\boldsymbol{x})\|p_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}))$ は $D(p(\boldsymbol{x})\|p_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})) = \sum_j p^j(\boldsymbol{x}) \frac{\log(p^j(\boldsymbol{x}))}{\log(p^j_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}))}$ として定義される $p(\boldsymbol{x})$ と $p_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})$ の KL ダイバージェンス[2]である．また，$p^*(\boldsymbol{x})$ は E に属する確率分布 $p(\boldsymbol{x})$ の中で $D(p(\boldsymbol{x})\|p_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}))$ を最小化するものであり，次の制約付き最適化問題の解として評価される．

$$\min\{\sum_j p^j(\boldsymbol{x}) \frac{\log(p^j(\boldsymbol{x}))}{\log(p^j_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}))}\} \quad \text{subject to} \quad H[p(\boldsymbol{x})] < c' \quad \text{and} \quad \sum_j p^j(\boldsymbol{x}) = 1 \tag{1}$$

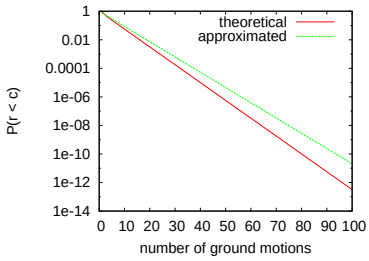
この定理から，

$$P(r<c) = P(p_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x}) \in E) \simeq \exp(-n * D(p^*(\boldsymbol{x})\|p_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}))) \tag{2}$$

と近似することによって $P(r<c)$ を n の関数として表現する．



(a) $c = 0.9$ の場合



(b) $c = 0.6$ の場合

図–2 $P(r<c)$ と n の関係

4. 数値シミュレーション

$P(r<c)$ の理論解を求めることが可能な単純な例として，ある条件を満たす設計地震動の集合 $\boldsymbol{G}$ に属する地震動が，その性質を表す指標 $\boldsymbol{x}$ に関してスカラー値 0 もしくは 1 の 2 値のみをとり，$p_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})$ が $p_{\boldsymbol{G}}(0) = p$，$p_{\boldsymbol{G}}(1) = 1-p$ となるベルヌーイ分布の場合を考える．この出現確率に従って，ランダムに n 波からなる集合 $\boldsymbol{g}$ を設定した際の $P(r<c)$ と n との関係を式 (2) による近似解から求め，理論解との比較を行った．

$p = 0.75$ としたときの，$c = 0.9$ および $c = 0.6$ の場合のシミュレーション結果を，図–2 に示す．$c = 0.6$ の場合とは，$c = 0.9$ に比較して $\boldsymbol{g}$ 中の波形の数が増えても標本分布 $p_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x})$ が母集団の $p_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})$ から大きく離れた分布をとる，より発生確率の低い現象を考えた場合であり，Sanov の定理による近似が相対的に有効に機能することが予想される．同図からは，式 (2) による近似解が n の増加に伴う $P(r<c)$ の指数的な減少をよく表していること，また，Sanov の定理の性質に従って，$c = 0.9$ の場合に比較して $c = 0.6$ の場合に近似精度が高いことが確認できる．

5. おわりに

本稿は，ある条件を満たす設計地震動をランダムに複数波用いた場合の構造物の安全性を，Sanov の定理に基づいて確率的に求める手法を提案した．今後はより実際的な条件の下で，本手法が有効に機能する条件などについて整理を行う．

参考文献

1) 宮本崇，本田利器：設計地震動の集合が有する情報量に基づく構造物の安全性評価，JCOSSAR2011 論文集 A 論文，pp.425-431, 2011
2) Thomas M. Cover and Joy A. Thomas：情報理論　基礎と広がり，共立出版，2012