

非減衰 2 層系地盤伝達関数列による多層系地盤伝達関数の 級数展開

京都大学防災研究所 正会員 ○ 後藤 浩之

1. はじめに

地盤の表層を鉛直に伝播する S 波実体波の増幅特性を評価することは、地震工学において重要な課題の 1 つであり、特定の地域を対象として表層の地震波増幅特性を面的に把握することなど、実務にも関わる問題である。表層の増幅特性を定量的に議論するためには、表層地盤が 1 次元の水平多層構造であると近似して、重複反射理論 (Haskell マトリクス法) により地盤伝達関数を求める方法¹⁾が一般的である。

地盤伝達関数は、表層に入射する地震波の振幅と地表で観測される地震波の振幅の比として定義される。多層系の地盤伝達関数は一般に周波数軸上で周期関数とならないことから一般論で議論することは難しく、低周波数側でピークを与える周波数とその増幅率とを表現するような単純な 2 層系に置き換えた上で、地盤の固有振動数と増幅率であるとするこも多い。本研究は、この考え方を数学的な裏付けをもった理論へと一般化することを目的としている。具体的には、任意の多層系地盤伝達関数を取り扱いの容易な非減衰 2 層系地盤伝達関数列の和で表現できることを示す。

2. 正規化した非減衰 2 層系地盤伝達関数の列

半無限の基盤と一定の厚さをもつ表層とからなる非減衰の 2 層系地盤を考える。表層、および基盤の S 波速度をそれぞれ β_1, β_0 、密度をそれぞれ ρ_1, ρ_0 とし、表層の厚さを h とする。このとき、鉛直入射する S 波実体波に関する地盤伝達関数 $H(\omega)$ は以下のように表現される。

$$H(\omega) = \frac{2}{\cos(\omega h/\beta_1) + iR \sin(\omega h/\beta_1)} \dots\dots\dots (1)$$

R は表層と基盤の S 波インピーダンス比で $\rho_1\beta_1/\rho_0\beta_0$ である。normalized energy density²⁾の性質を考慮すると、 $\omega \in [0, 2\pi n\beta_1/h]$ ($n \in \mathcal{N}$) に関する周波数平均が 1 となるように正規化できる。

$$a(\omega) = \frac{\sqrt{R}}{\cos(\omega h/\beta_1) + iR \sin(\omega h/\beta_1)} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、正規化した 2 層系地盤伝達関数列の列 $\{e_{kl}(\omega) \mid \omega \in [0, \Omega]\}$ を以下の通り定義する。

$$e_{kl}(\omega) = \frac{\sqrt{R_{kl}}}{\cos(2\pi p\omega/\Omega + \phi_{kl}) + iR_{kl} \sin(2\pi p\omega/\Omega + \phi_{kl})} \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $p = (2k-1)2^{l-1}$ ($k, l \in \mathcal{N}$)。 R_{kl} および ϕ_{kl} は、それぞれ S 波インピーダンス比と周波数シフトに相当するパラメータである。

Hilbert 空間 X を関数空間 $L^2([0, \Omega], d\omega/\Omega)$ で定義し、 l を固定して得られる関数列 $\{e_{1l}, e_{2l}, \dots\}$ の張る関数空間を X_l とする。 X_l は X の部分空間であり、かつ地盤伝達関数のクロスタームの性質³⁾から $X_l \perp X_m$ ($l \neq m$) である。任意の地盤伝達関数 H は X の元なので、 X_l への射影 $P_l H$ によって一意に分解できる。

$$H = P_1 H + P_2 H + \dots\dots\dots (4)$$

$P_l H$ は $e_{1l}, e_{2l}, \dots$ の線形和で表現されることから、それぞれの係数を一意に定めることができる。ただし、 $\{e_{kl}(\omega)\}$ の張る線形空間が X において稠密であることの証明は今後の課題である。

なお、 X_l の直交性はパラメータ R_{kl}, ϕ_{kl} の値に関わらず成立するため、自由に与えることができる。可能な限り少ない級数列でよい近似を与えることが望ましいことから、内積 $(e_{kl}, H) = \langle e_{kl}^*, H \rangle$ の絶対値がそれぞれ最大となるようなパラメータを探索して、それらをパラメータに持つような関数列に対して級数展開することにした。

キーワード: 地盤震動, 地盤伝達関数, 級数展開

連絡先: 〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄 Tel 0774-38-4067/ Fax 0774-38-4070

3. 数値実験例

半無限の基盤と表層2層からなる3層系地盤に対して、2層系地盤伝達関数による級数展開が可能かどうか数値実験により検証した。対象とするモデルは、層毎にS波速度および密度を変化させ、表層2層については減衰定数5%の内部減衰を与える。図1は対象とする2つのモデル(model A, model B)のS波速度構造である。なお、周波数区間は0-20 Hzとした。

与えられた3層系地盤に対して重複反射理論により地盤伝達関数を計算し、これを級数展開する。lの最大値を5, kの最大値を10に制限して得られた2層系地盤伝達関数による級数展開に対して、その級数和をとって元の3層系地盤伝達関数と比較したものが図2である。いずれのモデルも元の地盤伝達関数をよく再現していることが確認できる。本研究で使用している関数列は全て0-20 Hzの周波数区間の両端で等しい値を持つが、一般の地盤伝達関数は図2のように両端で等しい値を持つとは限らない。このため区間の端部に誤差が見られることから、実用上は端部の処理に工夫が必要である。

図3は各関数列の係数の絶対値が大きいものから5項を取り出して、その5項の和を計算して元の地盤伝達関数と比較したものである。図2と比較して地盤伝達関数を完全に再構築していないが、ピークを与える周波数や増幅率など、ある程度特徴を反映していることがわかる。図4は、1~5項目までの非減衰2層系地盤伝達関数形状を係数の重み付けをした後で示したものである。図4に示す5つの複素和の絶対値が図3に示したものである。元のピーク周波数を表現できるように関数形状が選択されている様子が確認できる。

級数項のそれぞれに対応してパラメータ R と ϕ が定まることから、具体的に2層系地盤構造と対応付けることは可能であるが、元の地盤とを物理的に結びつけて理解するためにはさらなる検討が必要である。

参考文献

- 1) Haskell, N.A.: Crustal reflection of plane SH waves, *J. Geophys. Res.*, Vol.45, pp.4147-4151, 1960.
- 2) Goto, H., Sawada, S. & Hirai, T.: Conserved quantity of elastic waves in multi-layered media: 2D SH case -Normalized Energy Density-, *Wave Motion*, Vol.48, pp.602-612, 2011.
- 3) 後藤浩之: 地盤伝達関数のクロスタームに関する基本的な性質, 土木学会論文集 A2 (応用力学) 特集号, 投稿中。

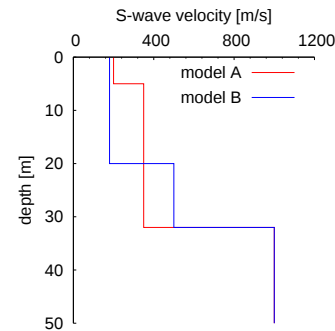


図1：対象とする3層系のS波速度構造

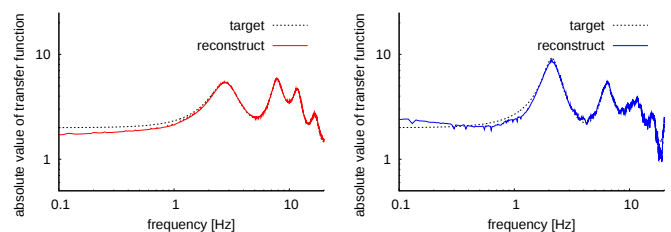


図2：対象とする3層系地盤伝達関数(target)と2層系地盤関数列の級数和(reconstruct)との比較(左: model A, 右: model B)

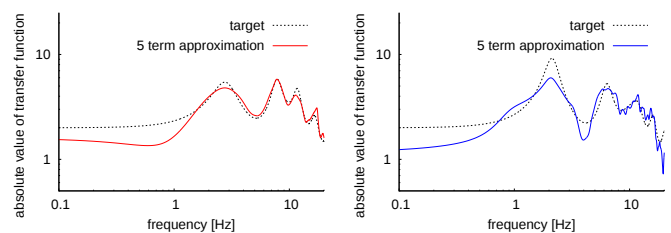


図3：5項目までの近似解との比較(左: model A, 右: model B)

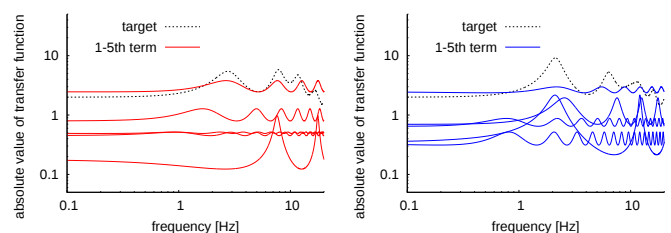


図4：1~5項目までの2層系地盤伝達関数(左: model A, 右: model B)