2 変数ポアソン分布に基づく上水道システムの構造的損失評価

東京都市大学大学院　学生員　小松　陸
東京都市大学　正会員　丸山　收

1. はじめに

本研究は，空間的に分布する上水道システムの構造的被害に関する地震リスクを PML 値 (Probable Maximum Loss)により評価する手法を示している．ここでは，メッシュ分割された対象地域において，メッシュ間の被害箇所数を 2 変数ポアソン分布に表現して，対象地域全体を評価するための手法を提案している．空間的に分布する各構造物の被害が独立であれば，中心極限定理に基づくポートフォリオ理論が適用できるが，研究対象である配水管被害に関しては，局所的に地震動，地盤特性などに相関があり，被害箇所数の空間分布に関する確率モデルの構築を目指している．

2. 被害推定確率モデル

確率地震 E_q の発生を条件として，対象配水地区が，n 個のメッシュで構成されているとする．メッシュ i には，異なる ℓ 種類の管種・管径を有する 配水管 $pipe_{j,i}$: $(i=1,2,\cdots,n)$，$(j=1,2,\cdots,\ell)$ が存在し，その平均被害率を $R_m(V)$ とすると，平均被害箇所数 $r_{j,i}$ は次式で表される．

$$r_{j,i} = R_m(V) \times L_{j,i} \tag{1}$$

$L_{j,i}$:メッシュ i の j 番目配水管 $pipe_{j,i}$ の総延長である．また，管路の平均被害率は式(2)および式(3)を用いて算出する．これらの推定式は，1995 年に発生した兵庫県南部地震における水道管路の被害データより求められたものである．

$$R_m(V) = C_p \times C_d \times C_g \times C_l \times R(V) \tag{2}$$

$$R(V) = 3.11 \times 10^{-3} \times (V-15)^{1.30} \tag{3}$$

ここで，$R_m(V)$: 平均被害率(箇所/km)，$R(V)$: 標準被害率(箇所/km)，C_p : 管種補正係数，C_d : 管径補正係数，C_g : 地盤補正係数，C_l : 液状化補正係数，V : 地表面最大速度(kine)である．

図-1 に A 市を対象とした鋼管の平均被害箇所数の試算例を示している．A 市は人口 350 万人程度であり，敷設されている鋼管に対してすべての管径を考慮している．図-1 では，対象地域を 4 次メッシュ(500m×500m)に分割して，地震動に関しては地震調査研究推進本部(J-SHIS)が公表している評価期間 50 年で超過確率 0.02 の確率地震を想定している．また，メッシュ内の配水管総延長に関しては，便宜上A市全体の配水管総延長をメッシュ内の人口比率に案分して計算している．

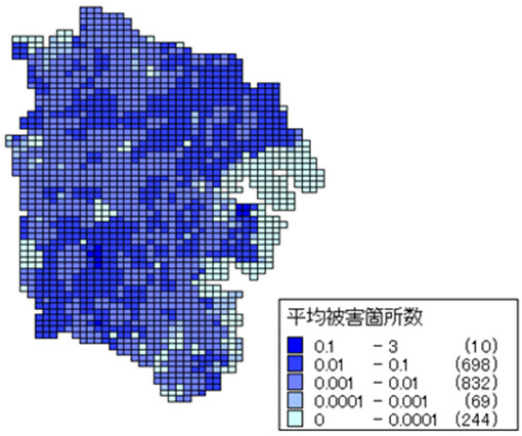

図-1　鋼管の平均被害箇所数
(評価期間 50 年における超過確率 0.02)

A 市全体の平均被害箇所数は，計算上 1000 箇所を超えるが，メッシュごとの平均被害箇所数は，非常に小さな値となっていることがわかる．このことから，基本的に，各メッシュにおける被害箇所数に関してはポアソン分布に従うものとして考える．

式(2)および式(3)を用いて，メッシュごとに配水管 $pipe_{j,i}$ の平均被害率 $R_m(V)$ を算出し，式(1)により総延長を乗じて，平均被害箇所数 $r_{j,i}$ を求める．配水管の被害は，管の延長方向にポアソン分布に従って発生すると考えると，メッシュ i の j 番配水管の被害発生箇所数を $X_{j,i}$，メッシュ m の k 番配水管の被害箇所数を $X_{k,m}$ とすると 2 変数ポアソン分布は次式で与えられる．

$$P(X_{j,i}=x_{j,i}, X_{k,m}=x_{k,m}) = \frac{(r_{j,i})^{x_{j,i}}(r_{k,m})^{x_{k,m}}}{x_{j,i}!x_{k,m}!}\exp-(r_{j,i}+r_{k,m}) \tag{4}$$

式(4)のポアソン分布の平均値および分散値は次式で与えられる．

$$\overline{X}_{j,i} = r_{j,i} \quad , \quad \overline{X}_{k,m} = r_{k,m} \tag{5}$$

キーワード：　事業継続計画，地震リスク，上水道システム，PML
連絡先：〒158-8557 世田谷区玉堤 1-28-1　TEL: 03-5707-0104　E-mail:omaruya@tcu.ac.jp

$$\sigma^2{}_{X_{j,i}} = r_{j,i} \quad , \quad \sigma^2{}_{X_{k,m}} = r_{k,m} \tag{6}$$

3. 配水管被害の相関 のモデル化

式(4)における被害箇所数 $X_{j,i}$, $X_{k,m}$ は, 管の延長方向にポアソン過程であることから, 互いに独立であり相関を有さない. しかしながら, 配水管の被害は空間的に相関を有する地震動, 地盤特性等に起因するので, 相関を有するものと思われる, ここでは. 文献 1)を参考にして, 相関を有する 2 変数ポアソン分布を $P^*(X_{j,i}=x_{j,i}, X_{k,m}=x_{k,m})$ を次式で与える.

$$\begin{aligned} &P^*(X_{j,i}=x_{j,i}, X_{k,m}=x_{k,m}) \\ &= \frac{(r_{j,i})^{x_{j,i}}(r_{k,m})^{x_{k,m}}}{x_{j,i}!x_{j,i}!} e^{-(r_{j,i}+r_{k,m})} \\ &\times[1+\alpha(e^{-x_{j,i}}-e^{-r_{j,i}\cdot c})(e^{-x_{k,m}}-e^{-r_{k,m}\cdot c})] \end{aligned} \tag{7}$$

ここで, $c=1-e^{-1}$ である.

被害箇所数 $X_{j,i}$, $X_{k,m}$ の周辺確率関数は, それぞれパラメータが, $r_{j,i}$, $r_{k,m}$ のポアソン分布であるので, 平均値ベクトルは, 式(5)と同様に次式となる.

$$E\begin{bmatrix} X_{j,i} \\ X_{k,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{j,i} \\ r_{k,m} \end{bmatrix} \tag{8}$$

一方共分散行列は, 次式で与えられる.

$$COV(X_{j,i},\ X_{k,m}) = \begin{bmatrix} r_{j,i} & \alpha r_{j,i} r_{k,m} c^2 e^{-r_{j,i}c} e^{-r_{k,m}c} \\ \alpha r_{j,i} r_{k,m} c^2 e^{-r_{j,i}c} e^{-r_{k,m}c} & r_{k,m} \end{bmatrix} \tag{9}$$

したがって, 相関係数は次式で与えられる.

$$\rho = \alpha\sqrt{r_{j,i} r_{k,m}}\, c^2 e^{-(r_{j,i}+r_{k,m})c} \tag{10}$$

式(10)によると, パラメータ α により相関係数が調整できる. 実際には, 式(2)は地震動, 地盤, 液状化の関数となっているために, これらの要因を考慮した相関係数推定式の構築が必要である. 構築されたモデルにおける相関係数に合うようにパラメータ α が決定されることになる.

4. 構造的被害損失額の算出

次に, 一般的な議論を行うために, 解析対象地区内の n 個のメッシュにおける j 番目配水管の総被害箇所数を考える.

$$Z_j = X_{j,1} + X_{j,2} + \cdots + X_{j,n} \tag{11}$$

構造的被害損失額 W は, ℓ 種類の管種・管径ごとの再調達価格および工事費用, $a_j (j=1,2,\cdots,\ell)$ を乗じたものとして, 次式で与えられる.

$$W = \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{i=1}^{n} a_j X_{j,i} \tag{12}$$

ここで, 式(11)に示した Z_j は, 独立ではないポアソン確率変数の和であり, 式(12)はさらに定数倍したものであることから, Z_j および W は, ポアソン分布の再生性を満足していない.

式(12)の平均値および分散は次式となる

$$\overline{W} = \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{i=1}^{n} a_j r_{j,i} \tag{13}$$

$$\sigma^2{}_W = \sum_{j=1}^{\ell} a^2{}_j \sigma^2{}_{Z_j} + \sum_{j}^{\ell}\sum_{\neq k}^{\ell} a_j a_k \,\mathrm{cov}(Z_j, Z_k) \tag{14}$$

ここで, 式(4)に示すように $X_{j,i}$ と $X_{k,m}$ が独立の場合, を考えてみる. その際, メッシュごとの 1 種類の配水管被害箇所数は, ポアソン過程に従う非常に小さな数であるが, 解析対象地区全体における全ての管種・管径の総被害箇所数として評価すると膨大な数となることが予想される. したがって, 独立な確率変数に対する中心極限定理が適用可能であり, 式(12)の構造的被害損失額 W は, 以下の平均値および分散値を有する正規確率変数として与えられる.

$$\overline{W} = \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n} a_k r_{k,i} \tag{15}$$

$$\sigma_w^2 = \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n} a_k^2 r_{k,i} \tag{16}$$

$Y = (W-\overline{W})/\sigma_w$ と W を正規化すると, Y は平均値 0, 分散値 1 の標準正規分布に従うことから, 次式により超過確率を算出できる.

$$P = 1 - \int_{-\infty}^{\theta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\frac{Y}{2}) dY \tag{17}$$

式(17)の累積超過確率の計算は, 経済学/金融工学で用いられるバリュー・アット・リスク(Value at Risk : VaR)と同一の式である. 地震工学では, 超過確率 P が 0.1 となる θ を求め構造的損失の PML を次式により算出することができる.

$$W_{PML} = \theta\sigma_w + \overline{W} \tag{18}$$

本研究では, 式(11)で与えられる被害箇所数を相関のあるポアソン確率変数の和として表現し, さらに再調達価格を乗じている. したがって, 都市域全体を評価対象としたときに, 式(7)を用いた結果の正規分布による近似の精度を検証する必要がある. 数値計算例による提案手法の検証結果については, 講演時に示す.

参考文献

1) J.Lakshminarayana, et al.(1999): On a bivariate poisson distribution, Communication in Statistics-Theory and Methods, 28:2, pp.267-276