Raviart-Thomas 補間を用いた三次元地下水流動解析における流量評価

清水建設株式会社　正○郷家光男，正　櫻井英行，正　白石知成
株式会社ダイヤコンサルタント　正　菱谷智幸，正　山浦昌之，非　鹿島浩之

１．はじめに　地下水流動問題における離散化解析手法は，岩盤貯蔵施設や放射性廃棄物地層処分などの施設計画・設計・操業の検討において欠かせない技術となっている．特に FEM は複雑な地質構造も精度良くモデル化できるために実用的で実績も多い．放射性廃棄物の処分施設において地下水の流速ベクトルや施設の通過流量は安全評価を行うためには重要な因子であることから，地下水流動解析では流速ベクトルや施設通過流量を精度良く求められることが極めて重要とされている．しかし，一般的な FEM では，速度ポテンシャルのみを未知数とするために，連続な流速場を精度良く求めることができないという指摘がなされるようになってきた．このような問題に対しては，一つは FEM の結果から精度の良い流速場を求める工夫[1]，もう一つは混合補間法を用いる方法がある．後者は速度ポテンシャルと流速を同時に近似する混合補間法を用いるものであり，定式化には混合モデル[2),3)]とハイブリッド・モデル[2)]の方法がある．そして，流速場の精度向上のために隣接要素間のフラックスを連続できる補間法[4)]を用いることが特徴である．

本論文では，ハイブリッド・モデルの三次元要素の基本性能として，算定される流量の比較を行うことにした．

２．ハイブリッド・モデル　三次元定常地下水流動問題を対象とする．支配方程式を以下に示す．

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = k\nabla\phi(\boldsymbol{x}) \quad \text{in } V \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{in } V \tag{2}$$

ここに，$\boldsymbol{u}$ はダルシー流速，k は透水係数，ϕ は速度ポテンシャル，V は解析領域である．境界条件は，

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \hat{\phi} \quad \text{on } \partial V_\phi \tag{3}$$

$$k\frac{\partial\phi}{\partial n} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n} = \hat{q} \quad \text{on } \partial V_n \tag{4}$$

ここに，添え字^は既知量を示し，$\boldsymbol{n}$ は領域境界における外向きの単位法線ベクトルである．∂V_ϕ と ∂V_n は，境界条件が与えられている領域 V の境界 ∂V の部分である．

この問題に，以下のハイブリッド型による変分原理を適用する．

$$\Pi_H(\phi^h,\boldsymbol{u}^h,\lambda) = \sum_E\left[\int_{V_E}\left(-\phi^h\nabla\cdot\boldsymbol{u}^h + \frac{1}{2k}\boldsymbol{u}^h\cdot\boldsymbol{u}^h\right)dV + \int_{\partial V_E}\lambda(\boldsymbol{u}^h\cdot\boldsymbol{n})dS - \int_{(\partial V_E)_n}\lambda\hat{q}dS\right] \tag{5}$$

ここに，ϕ^h と $\boldsymbol{u}^h$ は速度ポテンシャルと流速の近似関数，λ は全要素間 $(\partial V_E)_I$ の境界に沿うラグランジュ未定乗数，添え字 E は要素を示す．この汎関数の停留条件から，式(1)，(2)，(4)に加えて，次式が得られる．

$$\boldsymbol{u}_a^h(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}_{ab} + \boldsymbol{u}_b^h(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}_{ba} = 0 \quad \text{on } (\partial V_E)_I \tag{6}$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \phi^h(\boldsymbol{x}) \quad \text{on } (\partial V_E)_I \text{ and } \partial V_n \tag{7}$$

式(6)は，隣接する要素 a，b の共有面 $(\partial V_E)_I$ におけるフラックスの連続条件である．式(7)はラグランジュ乗数が速度ポテンシャルに対応することをしている．また，式(3)の境界条件の代わりに，次式が拘束条件となる．

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \hat{\phi} \quad \text{on } \partial V_\phi \tag{8}$$

３．近似関数　速度ポテンシャルと流速の近似関数 ϕ^h，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ に対して，Raviart-Thomas による混合補間[4)]（以降，RT）を適用する．RT では，ϕ^h は要素内で一定値とする．

$$\phi^h(\boldsymbol{x}) = \phi_E \tag{9}$$

流速は，局所座標系 $\boldsymbol{\xi}$ において近似関数 $\overline{\boldsymbol{u}}^h$ を構築し，物理座標系 $\boldsymbol{x}$ に写像する．自由度は要素構成面上のフラックスとする．六面体，五面体，四面体それぞれの近似関数を多項式で表わすと，以下のようになる．

$$\overline{\boldsymbol{u}}^h(\xi) = \left[\overline{\boldsymbol{P}}(\xi)\right]^T\{\alpha\} = \begin{bmatrix}1&0&0&\xi&0&0\\0&1&0&0&\psi&0\\0&0&1&0&0&\varsigma\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_6\end{Bmatrix} \tag{10}$$

$$\overline{\boldsymbol{u}}^h(\xi) = \begin{bmatrix}1&0&0&\xi&0\\0&1&0&\psi&0\\0&0&1&0&\zeta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_5\end{Bmatrix} \tag{11}$$

$$\overline{\boldsymbol{u}}^h(\xi) = \begin{bmatrix}1&0&0&\xi\\0&1&0&\psi\\0&0&1&\zeta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_4\end{Bmatrix} \tag{12}$$

ここに，$\{a\}$は未定係数である．

要素構成面の番号を j とすると，各面の流量 q_jは，次式により求められる．

$$q_j = \int_{\partial V_{E(j)}}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}_j dS = \int_{\partial\overline{V}_{E(j)}}\overline{\boldsymbol{u}}\cdot\overline{\boldsymbol{n}}_j d\overline{S} \tag{13}$$

式(13)より，式(10)～式(13)は，以下のようになる．

$$\overline{\boldsymbol{u}}^h(\xi) = \left[\overline{\boldsymbol{N}}(\xi)\right]^T\{q\} \tag{14}$$

ここに，$[\overline{\boldsymbol{N}}]$ は局所座標系における流速の形状関数である．流速場の変換には，以下の Piola 変換を適用する．

$$\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}(\xi)) = \left|\boldsymbol{J}(\xi)\right|^{-1}\left[\boldsymbol{J}(\xi)\right]\overline{\boldsymbol{u}}(\xi) \tag{15}$$

ここに，$\left[\boldsymbol{J}(\xi)\right]$ と $\left|\boldsymbol{J}(\xi)\right|$ は，写像関数から作られる Jacobian 行列とその行列式である．

キーワード：放射性廃棄物処分，地下水流動，混合補間，ハイブリッド・モデル，有限要素法
連絡先：〒105-8007　東京都港区芝浦一丁目 2-3　シーバンス S 館　Tel.: 03-5441-0594　Fax.: 03-5441-0512

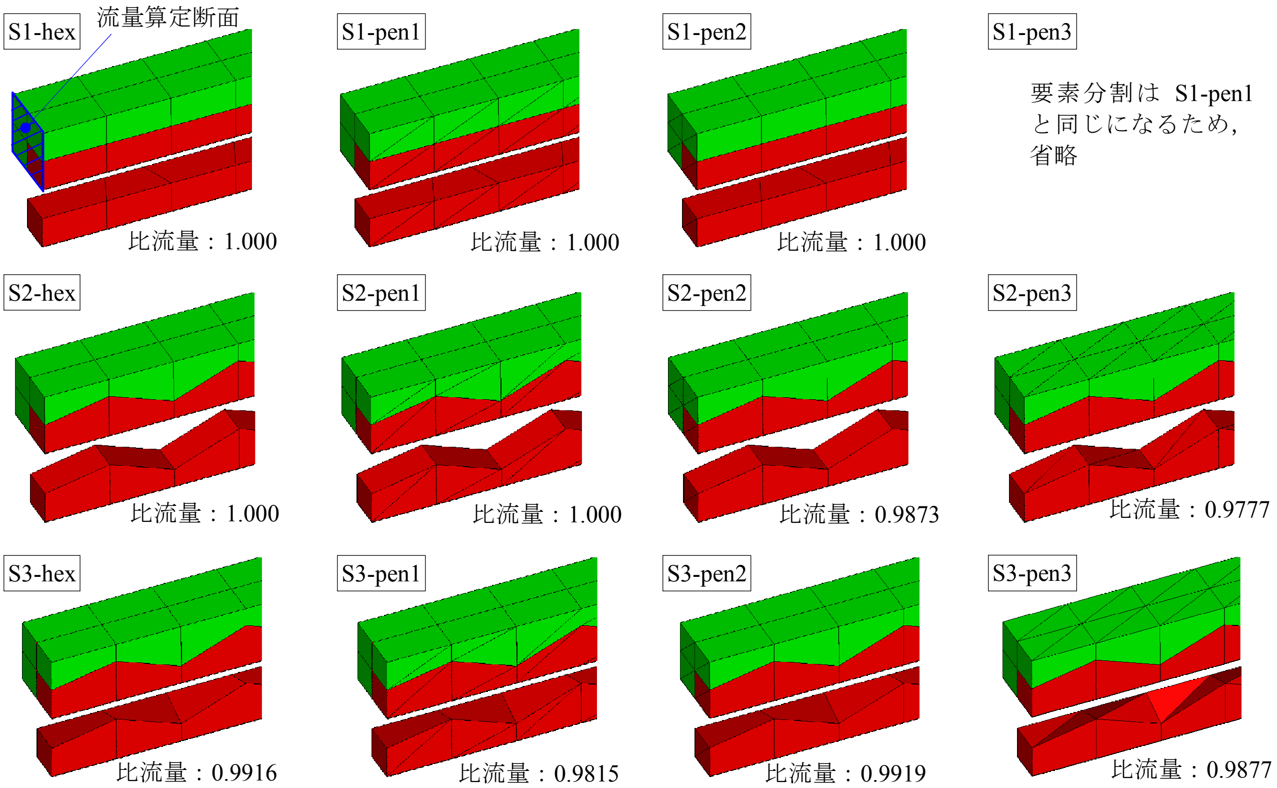

図-1　一様流のパッチテストの結果（上段：シリーズ 1，中段:シリーズ 2，下段：シリーズ 3）

ラグランジュ乗数を面上で一定として，式(9)，式(14)を式(5)に代入し，各変数に関する停留条件から解くべき有限要素方程式が得られる[5]．

4．数値実験　長さが 10 で，正方形の単位断面を有する均質媒体に対し，流速が 1 となるように速度ポテンシャルを両端に規定して，RT によるハイブリッド・モデル（以降，RT-HFEM）によって算定された流量と理論値との比較を行うことにした．テストは六面体，五面体，四面体で分割した計 4 シリーズのメッシュ群に対して行った．節点配置間隔を長手方向に 2.0，断面方向に 0.5 となる構造格子を基本シリーズ 0 として，それから節点位置を移動させて要素にゆがみを与えた 3 シリーズを用意した．そして，RT-HFEM により解析モデル端部における流量を算定した．シリーズ 1～3 の比流量の結果を図-1に示す．図中の比流量とは理論値に対する比率である．また，この図ではモデルの一部のみを表示し，分割パターンも分かるように赤い要素だけを抜き出したものも加えている．一番左は六面体要素，残りは分割パターンの違う五面体要素となっている．図の左上には S に続くシリーズ番号と要素種類（hex: 六面体，pen1～3: 五面体と分割パターン番号）を記している．

シリーズ 0 の全てのメッシュ，および，四面体のケースでは比流量は 1.0 となり，正しく流量が求められたために，紙面の都合上，図から省略した．六面体の面がねじれたケースと五面体の非構造格子のケースでは，流量比が理論値よりも 0.808～2.33%少なくなる場合があることが確認できた．理論値と合わなかったものは，文献 5 にある流速ベクトルが一様流となっていないケースと一致している．なお，従来の FEM の場合，全てのケースにおいて比流量が 1.0 となったことも確認した．

5．おわりに　三次元地下水流動問題に対して，RT-HFEM による有限要素の基本性能の確認試験の一部を示した．任意形状の三次元要素では，六面体要素と五面体要素において流量が理論値よりも少なくなる場合を確認した．RT-HFEM の三次元要素を用いて地下施設の通過流量を求める際，非構造格子の場合は注意が必要であると思われる．実用化に向けては，更なる性能確認が必要であると考えられる．

参考文献

1)Cordes, C., Kinzelbach, W.: Continuous groundwater velocity field and path line in linear bilinear, and trilinear finite elements, *Water Resour. Res.*, Vol.28, No.11, pp.2903-2911, 1992.

2)Younes, A. et al.: Mixed finite elements for solving 2-D diffusion-type equations, *Reviews of Geophysics*, Vol.48, RG1004, 2010.

3)Matringe, S.F. et al.: Robust streamline tracing for the simulation of porous media flow on general triangular and quadrilateral grids, *J. Comp. Phys.*, Vol.229, pp.992-1012, 2006.

4)Raviart, P.A., Thomas, J.M.: A Mixed finite element method for second order elliptic problems, *Mathematical Aspects of the Finite Element Method*, *Lectures. Notes in Math.*, Vol.606, Springer-Verlag, pp.292-315, 1977.

5)櫻井英行　他：三次元浸透流問題における Raviart-Thomas 補間関数の基本性能，第 17 回計算工学講演会論文集，2012（投稿中）．