

X-FEM と FCM による不連続変形の近似に関する比較考察

茨城大学 正会員 ○車谷 麻緒

1. はじめに

X-FEM (eXtended Finite Element Method)^{1,2)} や GFEM (Generalized Finite Element Method) では, 図-1 (a) に示すように, エンリッチ関数と呼ばれる解の特徴を表した関数を付加して, 要素内に変位やひずみの不連続性を導入している. 一方, 有限被覆法 (Finite Cover Method; FCM)³⁾ や Hansbo 法では, エンリッチ関数による近似の高度化が可能ではあるが, 図-1 (b) に示すように, 不連続境界に対して節点がサポートする近似領域をそれぞれ定義し, これらを重ね合わせることで要素内の不連続性を表現する方法が示されている. これらの手法は, 開発経緯や近似概念によって名称や不連続性の近似方法が異なっているだけであり, それぞれの近似方法の特徴・実装性・解析精度・計算効率が整理されていれば, 非常に有益な情報となり得るが, それらのデータをまとめた例は見当たらない.

そこで本研究では, 近似方法の相違が特徴的な X-FEM と FCM を例に, 変位やひずみの不連続性に対する近似方法の相違や等価性について述べる. そして, クラックによる変位の不連続性を有する例題と材料界面によるひずみの不連続性を有する例題を対象に, 不連続性の近似方法の相違による解析精度や計算効率について比較検討する.

2. X-FEM と FCM による不連続性の近似

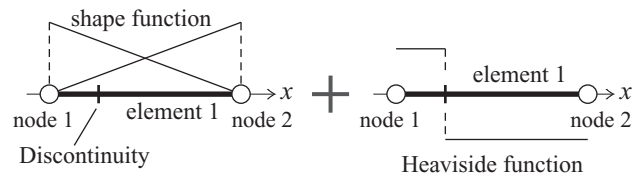
2.1 X-FEM による変位の近似

X-FEM では, 解の特徴を表したエンリッチ関数を用いて要素内に存在する不連続性を表現する. エンリッチメントを含む, 位置 $\mathbf{x}$ における X-FEM による変位の近似は次式で表される.

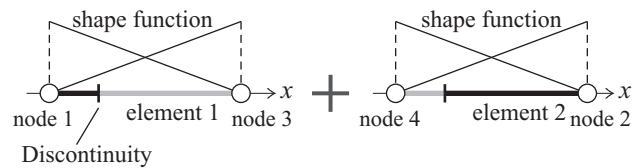
$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N_e} N_I(\mathbf{x}) \mathbf{d}_I + \sum_{I \in E} N_I(\mathbf{x}) F(\mathbf{x}) \mathbf{b}_I \quad (1)$$

ここで, $N_I(\mathbf{x})$ は FEM における節点 I の形状関数, N_e は要素を構成する節点数, $\mathbf{d}_I$ は節点 I の自由度ベクトル, $\mathbf{b}_I$ は節点 I の付加自由度ベクトル, E はエンリッチされる節点集合, $F(\mathbf{x})$ はエンリッチ関数である. X-FEM ではエンリッチメントに関する項 $F(\mathbf{x}) \mathbf{b}_I$ が付加されているので, $\mathbf{d}_I$ は節点変位ベクトルになるとは限らない. 節点変位ベクトルを求めるには, $\mathbf{d}_I$ と $\mathbf{b}_I$ を求めた後に, 式 (1) により節点変位ベクトルを求め直す必要がある.

単一のクラックを近似する場合, エンリッチ関数として, ヘビサイド関数を適用すれば, 不連続変形を表現することができる. また, 分岐や交差を含むクラックを近似する場合, エンリッチ関数として, ヘビサイド関数に加えて, クラックの分岐を表す分岐関数が必要となる¹⁾.



(a) Discontinuous approximation in the X-FEM



(b) Discontinuous approximation in the FCM

図-1 一般化有限要素法における変位の不連続性の近似

要素内の異種材料界面を近似する場合, エンリッチ関数として, 要素内の材料界面上で 1 をとり, 節点位置で 0 となる傾斜形の関数を用いる²⁾. 節点位置でエンリッチ関数が 0 となるので, この場合は, 式 (1) により節点変位ベクトルを求め直す必要がない.

孔などによる自由表面を含む場合, 自由表面の外側で変位場がゼロとなるよう, ステップ関数 $S(\mathbf{x})$ を用いて, 次式により不連続な変位が近似される.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_I N_I(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \mathbf{d}_I \quad (2)$$

孔などの自由表面による変位の不連続性の近似式 (2) では, エンリッチ近似による付加自由度を必要としない.

2.2 FCM による変位の近似

FCM は, X-FEM と同様に一般化有限要素法のひとつであるので, X-FEM で主に用いられるエンリッチメントによる変位の近似式 (1) を, FCM でもそのまま用いることができる. ただし, 近似の概念や開発の経緯が X-FEM と異なることから, 変位やひずみの不連続性の近似には, X-FEM のそれとは異なる方法がこれまでに採用されている³⁾.

FCM では, 1 つの節点まわりの要素の集合を被覆という. クラックなどの不連続面により被覆内の物理領域が二分される場合, それぞれの物理領域を近似するために, 2 重の被覆が定義される. このような不連続面を考慮した被覆の定義を全物理領域で行い「要素」を構成すると, 最終的に不連続面をまたいで層を形成するような解析メッシュとなり, 不連続変形を表すことができる.

クラックの分岐がある場合, 物理領域が三分されるので, 3 重の被覆を定義する. FCM では, クラックの形態に応じ

キーワード: 拡張有限要素法 (X-FEM), 有限被覆法 (FCM), PU, 不連続性の近似

〒 316-8511 茨城県日立市中成沢町 4-12-1, 茨城大学工学部, TEL: 0294-38-5162, FAX: 0294-38-5268

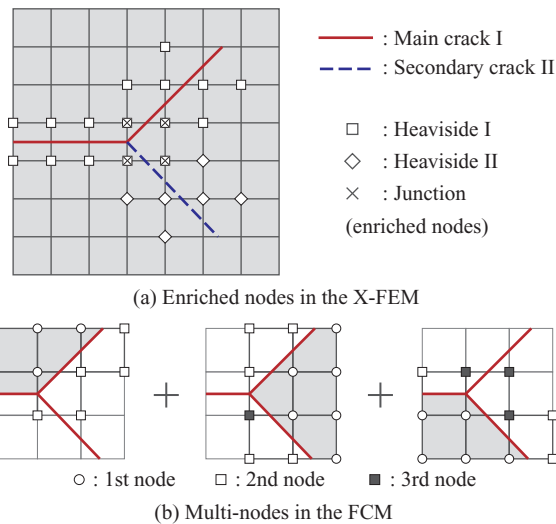


図-2 分岐クラックに対する近似方法の相違 (節点・自由度)

て被覆の定義数が異なるだけであり、X-FEM のように複数のヘビサイド関数や分岐関数を用いる必要はない。

異種材料界面が含まれる場合も物理領域が二分されるので、クラックの場合と同様に、2重の被覆が定義される。ただし、このままでは材料ごとに近似領域を定義しただけで、材料界面における変形条件は満たされないので、モルタル法のような境界接合を行う必要がある。

FCM でも変位の近似式 (1) を用いることができるので、X-FEM と同様にエンリッチ関数を用いて不連続変形を近似することは可能であるが、FCM では上記のような方法が採用されてきた。また、X-FEM において、自由表面による変位の不連続性を近似する式 (2) をクラックや異種材料界面のモデル化に適用すれば、FCM と同様の解析メッシュとなるので、FCM のような不連続変形の近似を X-FEM でも同様に行うことができる。

3. 不連続性の近似特性に関する比較考察

本節では、各種の不連続性の近似のうち、分岐クラックの簡単な数値実験を通して、不連続性に対する近似方法の相違が、解析精度や計算効率に与える影響について比較考察する。解析対象は、図-2 に示すような、分岐クラックを有する構造とする。2次元平面ひずみ問題を対象とし、上下方向に強制変位を与える条件とする。近似方法の相違を比較考察するにあたり、以下では、エンリッチ関数による近似を採用した方法を“X-FEM”、解析メッシュの多重定義による近似を採用した方法を“FCM”と便宜上総称することとする。

図-2 (a) に示すように、X-FEM では分岐クラックを I と II に分け、順にそれぞれのエンリッチ節点を定義した後、分岐を表すためのエンリッチ節点を定義する。最終的に、同図中の□◇×それぞれに1節点あたり2自由度が付加され、2自由度・4自由度・6自由度の節点が定義される。□と◇の節点は同じ4自由度を有する節点ではあるが、エンリッチ関数が異なっている。したがって、エンリッチ節点ではない通常の節点を含めて、4種類の節点が必要となる。

一方、FCM ではクラックを I と II に分ける必要はなく、

表-1 分岐クラックの例題における節点数と自由度数

	nodes	DOFs / node			total DOFs
		2	4	6	
X-FEM	64	42	18	4	180
FCM	90	90	0	0	180

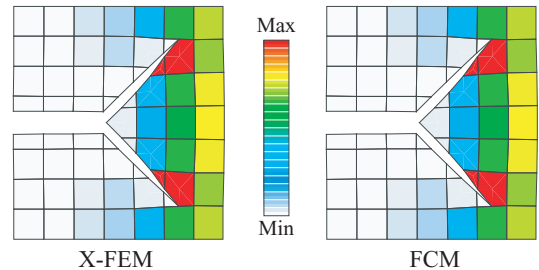


図-3 分岐クラックの解析結果 (最大主応力分布)

クラックにより分断される各物体領域が適切に近似されるように、被覆を定義していけばよい。具体的には、分岐を含む節点は3重、それ以外のクラックを含む節点は2重の節点(被覆)が定義され、図-2 (b) に示すように、クラックにより分断される各物理領域が不連続に近似されるように、多重節点における各節点を配置すればよい。

X-FEM と FCM における節点数と自由度数をまとめたものを表-1 に示す。分岐クラックがあると、X-FEM では1節点あたり2自由度、4自由度、6自由度の節点がそれぞれ必要となるが、FCM では節点変位を表す2自由度の節点のみでよい。総自由度数はどちらも同じである。

両者の解析結果は図-3 に示す通り、完全に一致する。解析結果は一致するが、両者の全体剛性マトリックスは異なっており、全体剛性マトリックスの固有値の分布にも違いが見られる。反復解法のひとつである共役勾配法を用いてこの例題を解くと、固有値分布の相違により、FCMの方が約10%反復回数が少なく済み、計算効率が良い。また、X-FEM では、式 (1) により変位ベクトルをリカバリーする必要があるが、FCM ではその必要がない分だけ計算量は少ない。

4. おわりに

クラックに対する節点・自由度の定義方法の相違、および剛性マトリックスの固有値分布や計算過程の相違により、FCM で採用されている変位の不連続性の近似方法の方が、計算量が少なく済み可能性が高い。

参考文献

- 1) C. Daux, N. Moës, J. Dolbow, N. Sukumar and T. Belytschko: Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.48, pp.1741–1760, 2000.
- 2) N. Moës, M. Cloirec, P. Cartraud and J.-F. Remacle: A computational approach to handle complex microstructure geometries, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.192, pp.3163–3177, 2003.
- 3) M. Kurumatani, K. Terada: Finite cover method with multi-cover-layers for the analysis of evolving discontinuities in heterogeneous media, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.79, pp.1–24, 2009.