# 軌道波動透過率の低減に有効なまくらぎ配置に関する研究

新潟大学大学院自然科学研究科　学生員　Batjargal Sodbilig
新潟大学工学部建設学科　正会員　阿部 和久
新潟大学自然科学研究科　正会員　紅露 一寛

## 1.　はじめに

レールのまくらぎ間隔は一定ではなく，バラツキを有していることが知られている．既往の研究[1)]では，まくらぎ間隔が均一な軌道とある程度不均一な軌道について応答解析を行っており，まくらぎ間隔にバラツキがある方が軌道の応答振幅が小さくなるという結果が得られている．このことより，軌道に適切なまくらぎ間隔のバラツキを設定することができれば，列車走行時の振動が低減でき，軌道の安全性及び維持管理費用の削減につながり，列車の乗り心地も改善されるものと考えられる．

そこで本研究では，上述の観点から最適なまくらぎの配置を理論的に検討する．具体的には軌道内を透過する波動エネルギーを目的関数とした最適化問題に帰着させ, 加振解析よりその有効性を確認する．

## 2.　軌道のモデル化

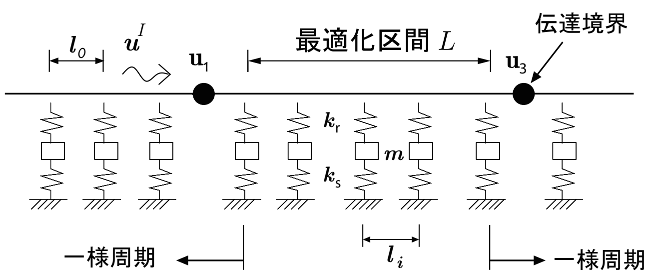


**図 1**　レールまくらぎの連成モデル

**図 1** の様に左右にまくらぎ間隔 $l_0$ の一様半無限周期区間を持つ軌道系を考える．その間に長さ $L$(一定) のまくらぎ間隔最適化区間を設ける．当該区間は，$n$ 個のまくらぎ区間からなるものとし，各まくらぎ間隔を $l_i(i=1,\ldots,n)$ で与える．このとき，次式が成り立つ．

$$L=\sum_{i}^{n} l_i \tag{1}$$

左より入射する伝播波動モードに対するエネルギー透過率を目的関数とした最適化問題を考える．**図 1** の最適化区間から，左右 $l_0/2$ の位置に半無限直線軌道を表現する伝達境界[2)]を設けて解析を行う．このとき求解方程式は次式で与えられる．

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{11}+\mathbf{K}_{LL} & \hat{\mathbf{K}}_{12} & \hat{\mathbf{K}}_{13} \\ \hat{\mathbf{K}}_{21} & \hat{\mathbf{K}}_{22} & \hat{\mathbf{K}}_{23} \\ \hat{\mathbf{K}}_{31} & \hat{\mathbf{K}}_{32} & \hat{\mathbf{K}}_{33}+\mathbf{K}_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{K}_{LL}+\mathbf{K}_{LR}\}u^I \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2}$$

式 (2) において，$\hat{\mathbf{K}}_{ij}=\mathbf{K}_{ij}-\omega^2\mathbf{M}_{ij}$,$\mathbf{K}_{LL}$, $\mathbf{K}_{LR}$,$\mathbf{K}_{RR}$ は半無限軌道のインピーダンス行列，$u^I$ は入射波動である．波動透過率 $E_r$ は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\bar{E}_t}{\bar{E}_i} \\ \bar{E}_i &= \frac{\omega}{2}\mathrm{Im}([\bar{u}^I]^T[K_{LR}]\{u^I\}) \\ \bar{E}_t &= \frac{\omega}{2}\mathrm{Im}([\bar{u}_3]^T[K_{RR}]\{u_3\}) \end{aligned} \tag{3}$$

## 3.　最適化問題の設定

次の目的関数の最小化問題を考える．

$$J:=E_r+\bar{\mathbf{\Lambda}}^T\{\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{U}-\mathbf{F}\}+\lambda(\sum_{i=1}^{n} l_i-L) \tag{4}$$

ここで，任意の Lagrange 乗数 $\mathbf{\Lambda}$,$\lambda$ に対して，次の制約条件が課せられる．

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{\Lambda}}^T\{\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{U}-\mathbf{F}\} &= 0 \\ \lambda(\sum_{i=1}^{n} l_i-L) &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

$l_i\rightarrow l_i+\Delta l_i$ による $J$ の変分 $\Delta J$ は形式的に次式の様に表わすことができる．

$$\Delta J:=[\boldsymbol{\beta}+\lambda\mathbf{1}]\{\Delta\mathbf{l}\} \tag{6}$$

ここで，まくらぎ間隔の増分 $\{\Delta\mathbf{l}\}$ を次の様に設定する．

$$\{\Delta\mathbf{l}\}=-\{\boldsymbol{\beta}+\lambda\mathbf{1}\}\Delta t \quad (\Delta t>0) \tag{7}$$

このとき，式 (5) の第 2 式より次式を得る．

$$\lambda=-\frac{1}{n}\sum\beta_i \tag{8}$$

式 (7) を (6) に代入すると次式を得る．

$$\begin{aligned} \Delta J:&=[\beta+\lambda\mathbf{1}]\{\Delta\mathbf{l}\} \\ &=-[\beta+\lambda\mathbf{1}]\{\beta+\lambda\mathbf{1}\}\Delta t<0 \end{aligned} \tag{9}$$

式 (9) より $\Delta J<0$ が保証され，最適化の反復過程で $J$ の最小値が得られる. そのときの $l_i(i=1,\ldots,n)$ が理論上の最適なまくらぎ配置を与える．

**Key Words:** まくらぎ配置，ストップバンド，パスバンド，最適化問題，透過解析，振動解析
連絡先：950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地 TEL 025 (262) 7028 FAX 025 (262) 7021

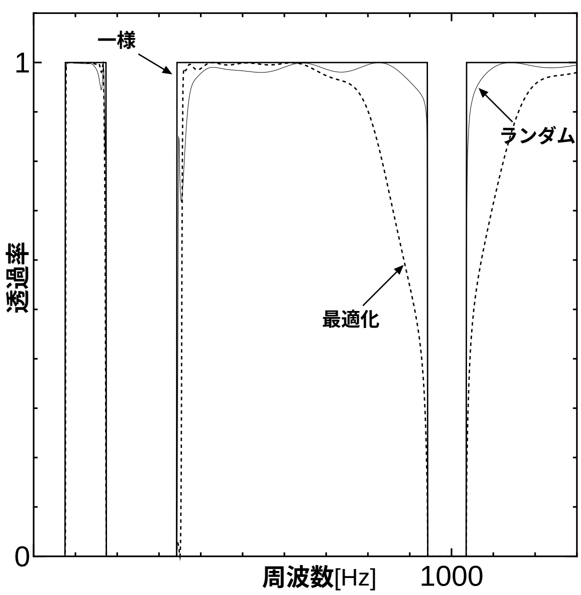


**図 2** 透過率の比較

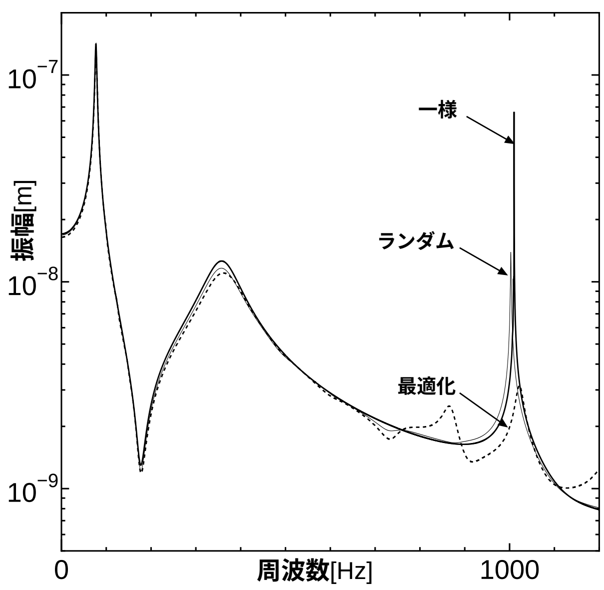


**図 3** 調和加振時のたわみ振幅応答

## 4. 最適化解析

### (1) 解析条件

レールは 50kgN レールを想定し，まくらぎ 1 区間を 12 要素で一様分割して与える.PC まくらぎは，レール 1 本当たり質量 100kg の質点で与え，軌道パッド，防振パッドのばね定数をそれぞれ 110,30MN/m とする. 最適化区間のまくらぎ間隔数を 9，各まくらぎ間隔の初期値を $l_i = 60$cm, 左右の一様半無限周期区間のまくらぎ間隔を $l_0 = 60$cm とした. 最適化一回当たりの最大変化量を 0.5cm とし，まくらぎ間隔の最小値を 55cm，最大値を 65cm に設定した.

### (2) 解析結果

一様なまくらぎ間隔の場合の透過率の解析結果を**図 2** に太線で示す．透過率が 0 となっているのは波動が伝播しないストップバンド，透過率が 1 となっているのがパスバンドである．パスバンド端の周波数 (76,173,343,942,1036Hz) 付近で共振が起こり得ることが知られており, これらの周波数近傍の透過率の低減が共振が起こりにくいまくらぎ配置につながると考えられる．そこで，周波数 343Hz および 942Hz 付近の周波数帯を対象に最適化を行った．その結果を**図 2** に点線で示す. 最適化の対象とした両周波数帯とも透過率が低下しており，特に高周波数帯の方が大幅に低減されていることがわかる. また，まくらぎ間隔を許容範囲内でランダムに与えた場合の結果を**図 2** に細線で示す. 最適化した場合の方が透過率がより低減されていることがわかる.

## 5. 加振応答解析

### (1) 解析条件

**4**. に求めた最適化区間 (L=5.4m) を 40 区間分並べた 216m の軌道モデルを対象に加振応答解析を行う. 軌道パッド，防振パッドのばねを複素剛性として与え減衰を導入し，打切り端からのはね返り波の影響がないようにしている. その下で軌道中央のまくらぎ間中心部を鉛直加振する.

### (2) 解析結果

一様まくらぎ配置，最適化したもの, まくらぎ間隔にバラツキを与えたものの 3 ケースについて，周波数-振幅関係を**図 3** に示す. まくらぎを等間隔に配置した場合は 1000Hz 付近で共振応答が卓越している. ランダムな配置においては等間隔よりは応答が小さくなるものの，比較的大きな卓越応答が認められる. 一方，最適化したまくらぎ配置の場合は, 低周波数帯では他のケースと大差ないものの，1000Hz 付近の応答は大幅に低減されており，最適化の効果が認められる.

## 6. おわりに

本研究ではエネルギー透過率を目的関数とした最適化問題を考え，透過率の低減に有効なまくらぎ配置を求めた. まくらぎ間隔の最適化は，特に高周波数帯の透過率の低減に有効であることがわかった. さらに，一様まくらぎ配置と, ランダムな配置の場合と合わせ，加振応答解析を行った. その結果，最適化により 1000Hz 付近の共振が抑制可能であることがわかった。今後は，実際の軌道におけるのまくらぎ間隔のデータを入手し，本手法の有効性をさらに検証していきたい.

### 参考文献

1) Abe,K., Shimizu,S., Aikawa,A. and Koro,K. :Theoretical study on a measuring method of rail axial stress via vibration modes of periodic track, WCRR 2011, CD-ROM, 2011.
2) Abe,K., Kikuchi,A., and Koro,K. :Wave propagation in an infinite track having an irregular region, IWRN10, 69-76, 2010.