

非圧縮性流れにおける発散フリーを保証する混合型 B スプライン近似に基づく特性 Galerkin 法

八戸高専 正会員 丸岡 晃 横浜国大 正会員 山田 貴博

1. 序

近年, B スプラインや NURBS (Non-Uniform Rational B-spline) を用いたアイソジオメトリック解析¹⁾が注目されている. 非圧縮性流れのアイソジオメトリック解析については, Stokes 問題においていくつかの混合型近似手法が提案されている^{2),3)}. この中で, B スプラインによって拡張された Raviart-Thomas 要素が提案され, この要素には任意の点で発散フリーの流速場が得られるという特徴がある. 本研究では, これを Navier-Stokes 方程式の離散化に適用する. また, 移流の卓越する流れに対しては, 我々が提案してきた時間 2 次精度化が可能な B スプラインを用いた特性 Galerkin 法^{4),5)}を適用する. これらの組み合わせにより, 双方の有する共通の特徴から, 安定化のための人工的なパラメータを必要とせず, 連立一次方程式の係数行列が対称となるスキームを構築することができる. ところで, Raviart-Thomas 要素はスリップ境界条件のときのみしか下限上限条件を満足しない. この問題に対し, Buffa *et al.*²⁾は圧力場の近似に局所的に T スプラインを用いることで回避し, Evans *et al.*³⁾は接線方向の流速の境界条件を Nitsche の方法によって課している. この方法は, 近似関数空間に手を加えないために, 全領域で発散フリーとなる特性が保持される. 本研究では, 後者の方法を適用する. 以降, 本報では, 上記の考えに基づく具体的な非圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対する定式化を示し, 数値実験によって提案手法の妥当性を検証する.

2. 非圧縮性 Navier-Stokes 方程式

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2$ or 3 を空間領域, Γ を Ω の境界, $(0, T)$ を時間領域とする. このとき, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ と $P(\mathbf{x}, t)$ を見出す以下のような Navier-Stokes 方程式を考える.

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla P - \nabla \cdot 2\nu \nabla^s \mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{on } \Gamma \times (0, T) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0 & \text{on } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

ここで, \mathbf{u} は流速, P は圧力を密度で除したもの(以降, 圧力と呼ぶ), \mathbf{f} は外力, ν は動粘性係数, \mathbf{g} は境界上の流速, \mathbf{u}_0 は初期の流速, $\nabla^s \mathbf{u}$ は以下に示す歪み速度テンソルである.

$$\nabla^s \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (2)$$

また, 式 (1) の第 1 式に含まれる左辺第 1 項と第 2 項の和(加速度)を以下のように表す.

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{d}{d\tau} \mathbf{u}(X(\mathbf{x}, t; \tau), \tau) \Big|_{\tau=t} \quad (3)$$

ここで, $X(\mathbf{x}, t; \tau)$ は, 時刻 t での位置 \mathbf{x} を起点とする特性曲線上の時刻 τ での位置である.

3. B スプラインの概要

B スプラインについて簡潔に説明する. 詳細は他の文献¹⁾⁻⁵⁾を参照されたい.

まず, 単変量の B スプラインについて考える. $B_i^p(\xi)$, $1 \leq i \leq n$ を p 次の B スプライン基底関数とする. また, $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ をノットベクトル, ξ_i をノットとする. ノットは同じ値を繰り返すことができ, 多重度を $\{r_i\}_{i=1}^m$

($1 \leq r_i \leq p+1$, $\sum_{i=1}^m r_i = n+p+1$, $r_1 = r_m = p+1$) とする. このとき, 単変量の B スプライン基底関数によって張られる単変量の B スプライン空間は以下のように定義される.

$$S_\alpha^p = \text{span} \{B_i^p\}_{i=1}^n \quad (4)$$

ここで, α は連続性に関する指標であり, $\alpha = \{\alpha_i = p - r_i\}_{i=1}^m$, $|\alpha| = \min \{\alpha_i : 2 \leq i \leq m-1\}$ である. さらに, B スプライン空間における導関数に対して以下のような関係が成り立つ.

$$\left\{ \frac{d}{d\xi} v : v \in S_\alpha^p \right\} = S_{\alpha-1}^{p-1} \quad (5)$$

ここで, $\alpha - 1 = \{-1, \alpha_2 - 1, \dots, \alpha_{m-1} - 1, -1\}$ である.

つぎに, 多変量の B スプラインについて考える. パラメトリック領域を $\hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$, 座標を $\hat{\mathbf{x}} = (\xi^1, \dots, \xi^d)^T \in \hat{\Omega}$, また, 多変量に対する記号を, それぞれ, $p_l, n_l, \Xi_l = \{\xi_{i,l}\}_{i=1}^{n_l+p_l+1}$, $\{r_{i,l}\}_{i=1}^{m_l}$, $\alpha_l = \{\alpha_{i,l}\}_{i=1}^{m_l}$, $B_{i,l}^{p_l}$, $1 \leq l \leq d$ とする. このとき, 多変量の B スプライン基底関数は単変量の基底関数のテンソル積によって以下のように表される.

$$B_{i_1, \dots, i_d}^{p_1, \dots, p_d}(\hat{\mathbf{x}}) = \otimes_{l=1}^d B_{i_l, l}^{p_l}(\xi^l), \quad 1 \leq i_l \leq n_l \quad (6)$$

また, 多変量の B スプライン空間は以下のように表される.

$$S_{\alpha_1, \dots, \alpha_d}^{p_1, \dots, p_d} = \text{span} \{B_{i_1, \dots, i_d}^{p_1, \dots, p_d}\}_{i_1=1, \dots, i_d=1}^{n_1, \dots, n_d} \quad (7)$$

パラメトリック領域から物理領域へのジオメトリマッピングを $F: \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$ とする. F には B スプラインや NURBS を利用することができる.

4. 離散化

(1) 流速と圧力に対する混合型 B スプライン近似

本研究では, 流速と圧力に対する近似に B スプラインによって拡張された Raviart-Thomas 要素^{2),3)}を用いる. まず, $\alpha = \min \{\alpha_l : l = 1, \dots, d\} \geq 1$ のとき, $\hat{\Omega}$ における流速と圧力に対する近似関数空間 \hat{V}^h, \hat{Q}^h は B スプライン空間によってそれぞれ以下のように定義される.

$$\hat{V}^h = \begin{cases} S_{\alpha_1, \alpha_2-1}^{p_1, p_2-1} \times S_{\alpha_1-1, \alpha_2}^{p_1-1, p_2} & \text{if } d = 2 \\ S_{\alpha_1, \alpha_2-1, \alpha_3-1}^{p_1, p_2-1, p_3-1} \times S_{\alpha_1-1, \alpha_2, \alpha_3-1}^{p_1-1, p_2, p_3-1} \times S_{\alpha_1-1, \alpha_2-1, \alpha_3}^{p_1-1, p_2-1, p_3} & \text{if } d = 3 \end{cases} \quad (8)$$

$$\hat{Q}^h = \begin{cases} S_{\alpha_1-1, \alpha_2-1}^{p_1-1, p_2-1} & \text{if } d = 2 \\ S_{\alpha_1-1, \alpha_2-1, \alpha_3-1}^{p_1-1, p_2-1, p_3-1} & \text{if } d = 3 \end{cases} \quad (9)$$

つぎに, それぞれの近似関数空間に対してスリップ条件および圧力不定性に関する制約を以下のように加える.

$$\hat{V}_0^h = \left\{ \hat{\mathbf{v}}^h \in \hat{V}^h : \hat{\mathbf{v}}^h \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \text{ on } \partial\hat{\Omega} \right\} \quad (10)$$

$$\hat{Q}_0^h = \left\{ \hat{q}^h \in \hat{Q}^h : \int_{\hat{\Omega}} \hat{q}^h d\hat{\Omega} = 0 \right\} \quad (11)$$

ここで, $\hat{\mathbf{n}}$ は $\partial\hat{\Omega}$ 上の単位外向き法線ベクトルである. 本研究では, 接線方向の流速の境界条件を Nitsche の方法によって課す³⁾. さらに, Ω における流速と圧力の近似関数空間 V_0^h, Q_0^h は, 以下のような Piola 変換によって得られる^{2),3)}.

$$V_0^h = \left\{ \mathbf{v}^h = \frac{DF}{\det(DF)} \hat{\mathbf{v}}^h \circ F^{-1} : \hat{\mathbf{v}}^h \in \hat{V}_0^h \right\} \quad (12)$$

$$Q_0^h = \left\{ q^h = \frac{1}{\det(DF)} \hat{q}^h \circ F^{-1} : \hat{q}^h \in \hat{Q}_0^h \right\} \quad (13)$$

ここで, DF は F の Jacobi 行列である.

(2) 特性法による時間離散

本研究では、式(1)の時間離散に著者の文献^{4),5)}による時間2次精度化が可能な特性法に基づく手法を用いる。 $\Delta t = T/N_T$, $t_k = k\Delta t$, $0 \leq k \leq N_T$, $v_k = v_k(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}, t_k)$ とし、 v_k は時間離散による近似関数でもあるとすると、特性法による時間離散式は以下のような多段法によって表される。

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}_{k+1} = \mathbf{u}_k(\mathbf{X}_k) + (1-\gamma)\Delta t \tilde{\mathbf{u}}_k(\mathbf{X}_k) \\ \text{where } \mathbf{X}_k = \mathbf{x} - \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{u}_k(\mathbf{x} - \Delta t \mathbf{u}_k) + \mathbf{u}_{k+1}) \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma\Delta t} \mathbf{u}_{k+1} + \nabla P_{k+1} - \nabla \cdot 2\nu \nabla^s \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{f}_{k+1} + \frac{1}{\gamma\Delta t} \tilde{\mathbf{u}}_{k+1} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_{k+1} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$\mathbf{u}_{k+1} = \frac{1}{\gamma\Delta t}(\mathbf{u}_{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_{k+1}) \quad (16)$$

ここで、 γ は時間精度を調整するパラメータであり、 $\gamma = 1$ のとき1次精度、 $\gamma = 1/2$ のとき2次精度となる。

(3) 特性 Galerkin 法による空間離散

定式化に必要な積分を以下のように定義する。

$$(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \quad (17)$$

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \frac{1}{\gamma\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} 2\nu \nabla^s \mathbf{w} : \nabla^s \mathbf{v} \, d\Omega \quad (18)$$

$$b(q, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \quad (19)$$

特性 Galerkin 法において必要な合成関数の含まれる項(式(14)の右辺項)の積分を以下のように定義する。

$$c(\mathbf{X}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \mathbf{v}) = (\mathbf{w}(\mathbf{X}) + (1-\gamma)\Delta t \dot{\mathbf{w}}(\mathbf{X}), \mathbf{v}) \quad (20)$$

境界条件の処理に Nitsche の方法を導入するため $a_N(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ と $f_N(\mathbf{v})$ をそれぞれ以下のように定義する。

$$\begin{aligned} a_N(\mathbf{w}, \mathbf{v}) &= a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \\ &- \int_{\Gamma} 2\nu(\nabla^s \mathbf{w}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} + (\nabla^s \mathbf{v}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} - \frac{C_{pen}}{h_F} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (21)$$

$$f_N(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma} 2\nu(-\nabla^s \mathbf{v}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} + \frac{C_{pen}}{h_F} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \quad (22)$$

ここで、 C_{pen} は正定数のペナルティパラメータ、 h_F は境界上の要素長である。

非線形反復を考慮した特性 Galerkin 法による離散式は、 $\mathbf{u}_k^h, \dot{\mathbf{u}}_k^h$, および、非線形反復の初期値が $\mathbf{u}_{k+1}^{h(0)} = \mathbf{u}_k^h$ と与えられれば、以下のように表される。

For $j = 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} \text{Find } \tilde{\mathbf{u}}_{k+1}^{h(j)} \in V_0^h \text{ such that} \\ (\tilde{\mathbf{u}}_{k+1}^{h(j)}, \mathbf{v}^h) = c(\mathbf{X}_k^{h(j)}, \mathbf{u}_k^h, \dot{\mathbf{u}}_k^h, \mathbf{v}^h), \forall \mathbf{v}^h \in V_0^h \\ \text{where } \mathbf{X}_k^{h(j)} = \mathbf{x} - \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{u}_k^h(\mathbf{x} - \Delta t \mathbf{u}_k^h) + \mathbf{u}_{k+1}^{h(j-1)}). \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} \text{Find } \mathbf{u}_{k+1}^{h(j)} \in V_0^h, P_{k+1}^{h(j)} \in Q_0^h \text{ such that} \\ a_N(\mathbf{u}_{k+1}^{h(j)}, \mathbf{v}^h) - b(P_{k+1}^{h(j)}, \mathbf{v}^h) + b(q^h, \mathbf{u}_{k+1}^{h(j)}) \\ = (\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{v}^h) + \frac{1}{\gamma\Delta t} c(\mathbf{X}_k^{h(j)}, \mathbf{u}_k^h, \dot{\mathbf{u}}_k^h, \mathbf{v}^h) + f_N(\mathbf{v}^h), \\ \forall \mathbf{v}^h \in V_0^h, q^h \in Q_0^h. \end{cases} \quad (24)$$

$$\mathbf{u}_{k+1}^{h(j)} = \frac{1}{\gamma\Delta t}(\mathbf{u}_{k+1}^{h(j)} - \tilde{\mathbf{u}}_{k+1}^{h(j)}) \quad (25)$$

非線形反復による収束値が得られれば、 t_{k+1} での計算値を $\mathbf{u}_{k+1}^h = \mathbf{u}_{k+1}^{h(j)}$, $\dot{\mathbf{u}}_{k+1}^h = \dot{\mathbf{u}}_{k+1}^{h(j)}$, $P_{k+1}^h = P_{k+1}^{h(j)}$ と更新できる。

5. 数値実験

$d = 2$, $\Omega = (0, 1)^d$, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ におけるキャピティ流れについて Reynolds 数を $Re = 1000$ として定常収束するまで解析を行う。また、参照解として、Ghia *et al.*⁶⁾および Erturk *et al.*⁷⁾の水平・垂直中心軸上の流速プロファイルを用いる。

多項式の次数は $p_1 = p_2 = 3$ とし、ノットベクトルは両端を除き多重化を行わない。すなわち、 $\alpha = 2$ となる。領域は $\Omega \equiv \hat{\Omega}$ とする。要素分割はパラメトリック領域、物理領域とも各方向の分割幅を一定とする。要素分割数は、一辺の分割数を N とすると、 $N = 10, 20, 40$ とする。境界条件は、領域の上辺で $\mathbf{g} = (1, 0)^T$ とし、それ以外で $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ とする。時間離散は $\Delta t = 1/N$, $\gamma = 0.51$ とする。ペナルティパラメータは $C_{pen} = 10$ とする。

図-1に $N = 20$ のときの圧力コンターを示す。振動は見られず、圧力に対して C^1 連続の近似関数を選んでいるため、比較的粗い分割でも滑らかなコンター線が描かれている。

図-2に水平・垂直中心軸上の流速プロファイルを示す。 $N = 20$ と $N = 40$ のラインが重なっているため、比較的粗い $N = 20$ でも収束解が得られている。さらに、格子点数の多い参照解のプロットとも重なっている。

以上により、連続性の高い B スプラインによって流速と圧力を近似することで、比較的粗いメッシュによっても、格子点数の多い参照解と同等の結果を得ることができた。

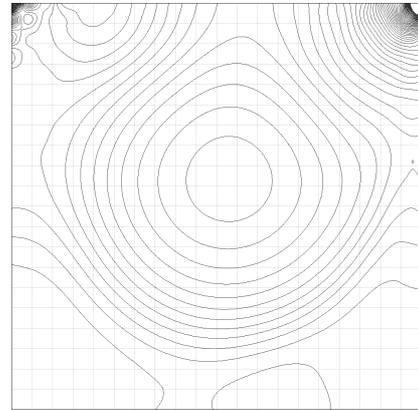


図-1 圧力コンター ($N = 20$)

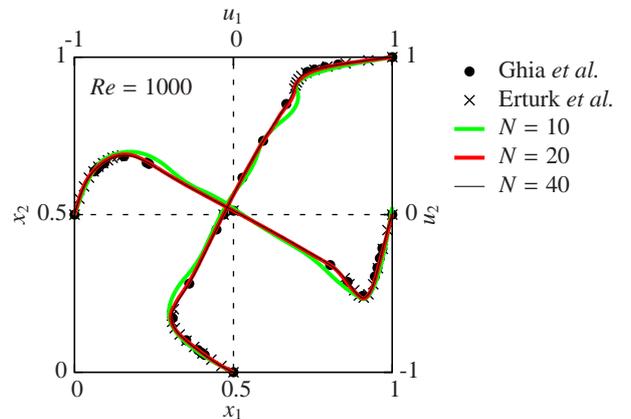


図-2 水平・垂直中心軸上の流速プロファイル

参考文献

- Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A., and Bazilevs, Y.: Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry, and mesh refinement, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.194, pp.4135-4195, 2005.
- Buffa, A., de Falco, C., and Sangalli, G.: Isogeometric analysis: Stable elements for the 2D Stokes equation, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol.65, pp.1407-1422, 2011.
- Evans, J.A., and Hughes, T.J.R.: Isogeometric divergence-conforming B-splines for the Darcy-Stokes-Brinkman equations, *ICES Report 12-03, The University of Texas at Austin*, 2012.
- 丸岡 晃, 山田 貴博: 移流拡散問題における B スプライン基底関数を用いた特性ガラキン法, *Transactions of JSCES, Meth. Fluids*, Vol.65, pp.1407-1422, 2011.
- 丸岡 晃, 山田 貴博: 非圧縮性流れにおける B スプライン基底関数を用いた特性ガラキン法, 数値流体力学シンポジウム講演予稿集, Vol.25, C04-1, 2011.
- Ghia, U., Ghia, K.N., and Shin, C.T.: High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, *J. Comput. Phys.*, Vol.48, pp.387-411, 1982.
- Erturk, E., Corke, T.C., and Cokcol, C.: Numerical solutions of 2-D Steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol.48, pp.747-774, 2005.