

Biot 媒体中の面内波動問題に対する 演算子積分時間領域境界要素法

東京工業大学大学院 学生会員 ○近澤 文香
群馬大学大学院 正会員 斎藤 隆泰
東京工業大学大学院 正会員 廣瀬 壮一

1. はじめに

本研究では、飽和多孔質弾性体中の波動伝搬問題に対する演算子積分時間領域境界要素法¹⁾(CQ-BEM)について検討する。飽和多孔質弾性体の力学モデルは、Biot²⁾により提案された。しかしながら、Biot の飽和多孔質弾性体モデル(以降、Biot 媒体と呼ぶ)では、波速の異なる複数の波動が生じ、それらが周波数に依存した分散・散逸性を持つため、時間領域で閉じた基本解が求まらず、従来の時間領域境界要素法を用いた定式化は困難であった。そこで、本研究では演算子積分時間領域境界要素法を Biot の飽和多孔質弾性モデルに適用した解析を行い、その有効性について検討する。

2. Biot 媒体中の波動問題

以下では、 $(\cdot)_{,i}$ は x_i 方向に関する空間微分、 $(\cdot)^{\cdot}$ は時間に関する微分を示す。また、同一項で繰返される添字は総和規約に従うものとする。なお、添字が小文字の場合は 1, 2 を、大文字の場合は 1, 2, 3 の値をとる。

(1) 支配方程式

Biot 媒体における固体骨格部の変位を u_i 、間隙流体の変位を U_i 、間隙率 β の時の相対変位を $w_i = \beta(U_i - u_i)$ 、固体骨格部のひずみを e_{ij} 、全応力を σ_{ij} 、流体圧力を p とすると、固体および流体部に対する運動方程式は次式で表わされる。

$$\text{固体: } \sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i + \rho_f \ddot{w}_i \quad (1)$$

$$\text{流体: } p_{,i} + \rho_f c_i = -\rho_f \ddot{w}_i - \frac{\rho_f}{\beta} \ddot{w}_i - b \dot{w}_i \quad (2)$$

ここに、 ρ, ρ_f はそれぞれ固体骨格と間隙を飽和する流体の混合物、間隙流体の密度であり、 b は浸透率 k 、粘性係数 η を用いて $b = \eta/k$ で表される散逸パラメータである。また、 b_i および c_i はそれぞれ、混合物および流体の質量に働く物体力である。なお、Biot 媒体中の構成方程式および適合条件式は、固体骨格部の Lamé 定数 λ, μ 、Biot の弾性係数 M 、Biot の有効応力定数 α を用いて次式で表される。

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + (\lambda e - \alpha p)\delta_{ij}, \quad p = -\alpha M e - M w_{k,k} \quad (3)$$

$$\text{ただし, } e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad e = e_{kk} = u_{k,k} \quad (4)$$

(2) 飽和多孔質体中の波の性質

Biot 媒体中を伝搬する波の特性として、横波と 2 種類の波速の異なる縦波の存在が知られている。角周波数 ω の時

間調和な平面進行波を考えると、横波波数 k_T は、

$$k_T^2 = \frac{\tilde{\rho}}{\mu} \omega^2 \quad (5)$$

で表わされる。また、2 種類の縦波波数 k_{L1} および k_{L2} は、福井ら³⁾が導入した連成効果が生じない場合の波数、

$$k_{L10}^2 = \frac{\tilde{\rho}}{\lambda + 2\mu} \omega^2, \quad k_{L20}^2 = \frac{\tilde{m}}{M} \omega^2, \quad k_Q^2 = \frac{\tilde{m}\tilde{\alpha}^2}{\lambda + 2\mu} \omega^2 \quad (6)$$

を用いて、

$$\left. \begin{matrix} k_{L1}^2 \\ k_{L2}^2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left[(k_{L10}^2 + k_{L20}^2 + k_Q^2) \mp \left\{ (k_{L10}^2 + k_{L20}^2 + k_Q^2)^2 - 4k_{L10}k_{L20} \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \quad (7)$$

で表される。ここに、 $\tilde{m}, \tilde{\alpha}, \tilde{\rho}$ は散逸パラメータ b および流体質量パラメータ $m = \rho_f/\beta$ を用いて次式で与えられる。

$$\tilde{m} = m + i \frac{b}{\omega}, \quad \tilde{\alpha} = \alpha + \frac{\rho_f}{\tilde{m}}, \quad \tilde{\rho} = \rho + \frac{\rho_f^2}{\tilde{m}} \quad (8)$$

これより、Biot 媒体中では 3 種類の異なる波速の波が存在し、これらがすべて周波数に依存した分散・散逸性をもつことがわかる。

3. 演算子積分時間領域境界要素法

(1) 境界積分方程式

支配方程式および構成方程式 (1)–(3) より時間領域積分方程式は次式で表される。

$$C_{IJ}(\mathbf{x})q_J(\mathbf{x}) = q_I^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int_S U_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * t_J(\mathbf{y}, t) dS_y - \int_S W_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * q_J(\mathbf{y}, t) dS_y \quad (9)$$

なお、これ以降、求める未知数を固体変位の u_i および流体圧力 p から成る一般化変位 $\mathbf{q} = \{u_1, u_2, p\}$ としている。ここで、 $*$ は畳込み積分を表わし、 $q_I^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$ は入射波、 $t_J(\mathbf{y}, t)$ は山本⁴⁾に倣い導入した $q_J(\mathbf{y}, t)$ に対応する一般化表面力である。また、 $U_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ および $W_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ は Biot の多孔質弾性体における時間領域基本解および対応する二重層核、 $C_{IJ}(\mathbf{x})$ は自由項である。

(2) 演算子積分法による離散化

式 (9) を空間に関して M 個の一定要素で離散化し、時間増分を Δt として演算子積分法を用いると、第 n ステップ

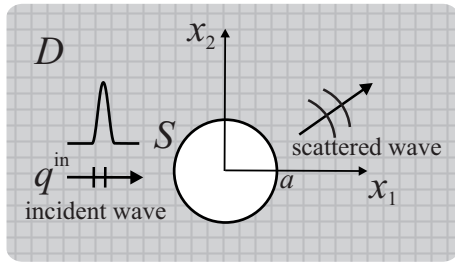


図1 数値解析モデル

における離散化された境界積分方程式は次式で表される.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}q_I(\mathbf{x}, n\Delta t) &= q_I^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) \\ &+ \sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=1}^n \left[A_{IJ}^{n-k;\alpha}(\mathbf{x}) t_J^{\alpha}(k\Delta t) - B_{IJ}^{n-k;\alpha}(\mathbf{x}) q_J^{\alpha}(k\Delta t) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

ここで, 上添字の α は要素番号を示す. また, $A_{IJ}^{m;\alpha}$ および $B_{IJ}^{m;\alpha}$ は影響関数であり,

$$A_{IJ}^{m;\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\int_{S^{\alpha}} \hat{U}_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) dS_y \right] e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} \quad (11)$$

$$B_{IJ}^{m;\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\int_{S^{\alpha}} \hat{W}_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) dS_y \right] e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} \quad (12)$$

で表される. $\hat{U}_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$, $\hat{W}_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ は Biot 媒体における Laplace 変換域での基本解と対応する二重層核である. また, $\mathcal{R}, L$ は演算子積分法のパラメータ, s_l は Laplace パラメータである.

4. 数値解析例

数値解析例として, 図1に示すような半径 a の散乱体が存在する Biot 媒体中に速い縦波 (L_1 波) を入射する解析モデルを考える. Biot 媒体中では, 波速が分散特性をもつので, 本研究では粘弾性波動問題における Saitoh ら¹⁾ に倣い, x_1 方向に進行する周期 $T_0 (= 2\pi/\omega_0)$, 周波数 ω_0 , 振幅 u_0 の L_1 波を想定し, u_i^{in} および p^{in} を与えた. ここでは, 固体変位に関する時間領域入射 L_1 波 u_i^{in} のみを示す.

$$u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = \delta_{i1} \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{u_0 \omega_0^2 (1 - e^{i\omega T_0})}{2i\omega(\omega^2 - \omega_0^2)} e^{ik_{L_1} x_1} \right] \quad (13)$$

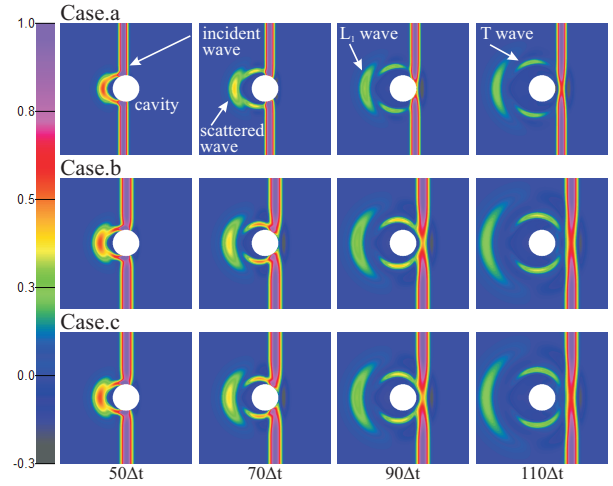
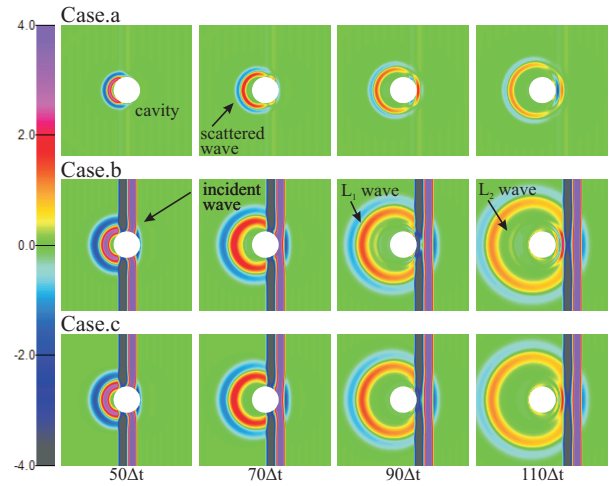
ここに, $\mathcal{F}^{-1}$ はフーリエ逆変換を表し, δ_{ij} はクロネッカーデルタである. また, 散乱体の境界 S での境界条件は, 全応力に関する表面力がゼロ ($t_i = 0$) で, 非浸透性 ($t_3 = 0$) の自由表面とした. 物性を示すパラメータには表-1を用い, Biot 媒体の固体部分と流体部分の連成の程度が, 散乱波に与える影響を調べるため, 次の3条件で解析を行った.

- 連成が弱く散逸がない場合 ($\alpha = 0.21, b = 0$)
- 連成が強く散逸がない場合 ($\alpha = 1, b = 0$)
- 連成が強く散逸がある場合 ($\alpha = 1, b = 10$)

散乱体周辺の u_1 および p の可視化結果を図2, 3に示す. Case.a, b を比較すると, 連成が強い場合には L_1 波の波速

表-1 散乱問題の計算に用いた多孔質パラメータ

$\mu/(\lambda + 2\mu)$	$\lambda/(\lambda + 2\mu)$	$M/(\lambda + 2\mu)$	β
1/3	1/3	5/6	0.2

図2 散乱体周辺の固体変位 u_1 図3 散乱体周辺の流体圧力 p

が速くなり, 流体圧力は, 連成が強いほど圧力が大きく表れている. また, 図3の Case.b, c を比較すると, 散逸のない Case.b において遅い縦波 (L_2 波) と考えられる波動が, 散逸のある Case.c より顕著に表れていることが確認できる.

5. まとめ

Biot の飽和多孔質弾性体モデルにおける演算子積分時間領域境界要素法を開発し, 散乱波動場の解析を行った. Biot 媒体中を伝搬する波動は連成の強さに大きく依存することが確認できた. 今後は, 3次元問題への拡張および逆問題への応用を考える.

参考文献

- 1) Saitoh, T., Hirose, S., Fukui, T. : Convolution quadrature time-domain boundary element method and acceleration by the fast multipole method in 2-D viscoelastic wave propagation, *Theoretical and applied mechanics Japan*, Vol.57, pp.358-393, 2009.
- 2) Biot, M.A. : Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-frequency range, *J. Acoust. Soc. Am*, Vol. 28, pp.168-178, 1956.
- 3) 福井卓雄, 船戸慶輔, 井上耕一: Biot 物体中における波動問題の周波数領域境界要素法解析, 境界要素法論文集, Vol.13, pp.149-152, 1996.
- 4) 山本晃司: 飽和多孔質弾性体における散乱波動場の数値解析手法とその応用, 東北大学博士論文, 2004.