

軸対称多層弾性構造解析における体積ひずみを用いた理論解の誘導

独立行政法人 港湾空港技術研究所 正会員 ○川名 太
東京電機大学 フェロー会員 松井邦人

1. 目的

舗装の構造解析においては、BISAR, CHEVRON, ELSA や GAMES など様々な多層構造解析プログラムが活用されている。舗装の解析においては、舗装を静的な円形等分布荷重が表面に作用する多層弾性構造としてモデル化し、変位関数や応力関数などを用いて変位や応力を表し、Hankel 変換を適用して理論解を誘導する手法がよく用いられている。しかしながら、複雑な検討を行う場合などには、現象を具体的に理解できるよう式を誘導することが望ましく、また、評価すべき現象に対して個々に応力関数や変位関数を設定するのではなく、種々の現象に対して、同一の表現形式のもとで変位や応力が取り扱えれば、非常に有用であると考えられる。よって、本稿では、この問題に対し、動的解析への拡張等を考慮して、体積ひずみを用いて理論解の誘導を試みた。また、本理論解が既往の解析プログラム GAMES¹⁾の結果とよく一致することを確認した。

2. 体積ひずみを用いた理論式の誘導

円柱座標系(r,θ,z)における応力σの平衡方程式は、式(1)で与えられる。

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \tag{1a}$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r'} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z'} + \frac{\tau_{rz}}{r'} = 0 \tag{1b}$$

応力σと変位uの関係は、式(2)、体積ひずみΔは、式(3)の通りである。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial u_r / \partial r \\ u_r / r \\ \partial u_z / \partial z \\ \partial u_z / \partial r + \partial u_r / \partial z \end{Bmatrix} \tag{2}$$

$$\Delta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{3}$$

λ, μは、ラメ定数である。式(2)の関係を式(1)に代入し、式(3)を用いて整理すると以下の式が得られる。

キーワード 多層弾性理論, 体積ひずみ, 舗装構造評価

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} + \mu \nabla_1^2 u_r = 0 \tag{4a}$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla_0^2 u_z = 0 \tag{4a}$$

ここで、∇_v²は、軸対称のラプラス演算子である。

$$\nabla_v^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{5}$$

式(4)より、

$$\nabla_0^2 \Delta = 0 \tag{6}$$

を得る。式(6)をハンケル変換すると、

$$\int_0^\infty r (\nabla_0^2 \Delta) J_0(\xi r) dr = \left(\frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 \right) \hat{\Delta}_0 = 0 \tag{7}$$

Δ₀はΔに関する0次のHankel変換である。式(7)の解は、以下の通りとなる。

$$\hat{\Delta}_0 = A e^{\xi z} + B e^{-\xi z} \tag{8}$$

式(2)および(4)をHankel変換し、式(8)を用いて整理すると、変位uおよび応力σの各成分のHankel変換は、積分定数C~Fを用いて以下のように表すことができる。なお、σ_rとσ_θは、直接Hankel変換を求めることができないため、式(10)のように工夫している。

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}_{r1} \\ \hat{u}_{z0} \\ \hat{\sigma}_{z0} \\ \hat{\tau}_{rz1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_0^\infty r u_r J_1(\xi r) dr \\ \int_0^\infty r u_z J_0(\xi r) dr \\ \int_0^\infty r \sigma_z J_0(\xi r) dr \\ \int_0^\infty r \tau_{rz} J_1(\xi r) dr \end{Bmatrix} = [P_1] \begin{Bmatrix} C \\ D \\ E \\ F \end{Bmatrix} \tag{9}$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{H}_1 \\ \hat{H}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_0^\infty r \left(\sigma_r + \frac{2\mu u_r}{r} \right) J_0(\xi r) dr \\ \int_0^\infty r (\sigma_r + \sigma_\theta) J_0(\xi r) dr \end{Bmatrix} = [P_2] \begin{Bmatrix} C \\ D \\ E \\ F \end{Bmatrix} \tag{10}$$

ここで、[P₁]および[P₂]は、それぞれ4×4、2×4のマトリックスであり、その成分は、表-1および表-2に示す通りである。また、係数C~Fは、Hankelパラメータξの関数で、各層で異なり、境界条件を与えることで設定される。これをHankel逆変換して、着目点での変位および応力を算定する。

3. 例題

(1)3層弾性体

図-1(a)に示す3層弾性体の表面に円形等分布荷重が作用するものとする。載荷半径は15cm, 載荷合力は49kNとした。図-2(a)に地表面のたわみを算定した結果を示す。図中には、多層構造解析プログラム GAMES による算定結果を併記しており、本手法で得られた結果は、完全に一致している。層内の応力とひずみ分布についても同様の結果を得ている。本手法では、Hankel 逆変換の数値積分や表面付近の応力とひずみの計算精度を確保する方法について、GAMES と同様の方法²⁾を用いているので、同等の精度で解が得られたものと考えられる。

(2)半無限弾性体

図-1(b)に示す半無限弾性体上の表面に円形等分布荷重又はインバースハイパボリック型の分布荷重が作用するものとする。載荷半径は15cm, 載荷合力は49kNとした。図-2(b)に地表面のたわみを算定した結果を示す。横軸は、載荷位置からたわみの算定位置までの距離を載荷半径で除した値を示している。等分布荷重とインバースハイパボリック型の分

布荷重とで変位の発生状況に差が生じている。同図には、Sneddon が求めた半無限体に円形断面を有する剛体を圧入した時の地表面変位の解を併記しているが、インバースハイパボリック型の分布荷重を設定した結果とほぼ一致している。

4. まとめ

多層弾性構造における変位および応力の理論解を体積ひずみを用いて誘導し、既存の構造解析プログラム GAMES との比較を行って、完全に解が一致することを確認した。今後は、水平荷重や動的作用に対する解の誘導を試みる予定である。

5. 謝辞

本稿の執筆にあたり、GAMES 勉強会の資料を参考にさせていただきました。ここに記して、関係各位に感謝の意を表します。

参考文献

- 1)土木学会：多層弾性理論による舗装構造解析入門，舗装工学ライブラリー3，平成17年，ISBN4-8106-0471-3
- 2) James MAINA ら：Elastic Multi-layered Analysis Using DE-Integration, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 41, pp.853-pp.867, 2005

表-1 [P₁]マトリックスの成分

$\left(1 - \frac{\xi}{4\nu-3}\right)e^{\xi}$	$\left(1 + \frac{\xi}{4\nu-3}\right)e^{-\xi}$	$-\frac{\xi}{4\nu-3}e^{\xi}$	$-\frac{\xi}{4\nu-3}e^{-\xi}$
$\frac{\xi}{4\nu-3}e^{\xi}$	$\frac{\xi}{4\nu-3}e^{-\xi}$	$\left(1 + \frac{\xi}{4\nu-3}\right)e^{\xi}$	$\left(1 - \frac{\xi}{4\nu-3}\right)e^{-\xi}$
$-\frac{E\xi(2\nu-1-\xi)}{(\nu+1)(4\nu-3)}e^{\xi}$	$-\frac{E\xi(2\nu-1+\xi)}{(\nu+1)(4\nu-3)}e^{-\xi}$	$\frac{E\xi(2\nu-2+\xi)}{(\nu+1)(4\nu-3)}e^{\xi}$	$-\frac{E\xi(2\nu-2-\xi)}{(\nu+1)(4\nu-3)}e^{-\xi}$
$\frac{E\xi(2\nu-2-\xi)}{(\nu+1)(4\nu-3)}e^{\xi}$	$-\frac{E\xi(2\nu-2+\xi)}{(\nu+1)(4\nu-3)}e^{-\xi}$	$-\frac{E\xi(2\nu-1+\xi)}{(\nu+1)(4\nu-3)}e^{\xi}$	$-\frac{E\xi(2\nu-1-\xi)}{(\nu+1)(4\nu-3)}e^{-\xi}$

表-2 [P₂]マトリックスの成分

$-\frac{E\xi(-2\nu+3+\xi)}{(\nu+1)(4\nu-3)}e^{\xi}$	$\frac{E\xi(2\nu-3+\xi)}{(\nu+1)(4\nu-3)}e^{-\xi}$	$-\frac{E\xi(2\nu+\xi)}{(\nu+1)(4\nu-3)}e^{\xi}$	$\frac{E\xi(2\nu-\xi)}{(\nu+1)(4\nu-3)}e^{-\xi}$
$-\frac{E\xi(3+\xi)}{(\nu+1)(4\nu-3)}e^{\xi}$	$\frac{E\xi(-3+\xi)}{(\nu+1)(4\nu-3)}e^{-\xi}$	$-\frac{E\xi(4\nu+\xi)}{(\nu+1)(4\nu-3)}e^{\xi}$	$\frac{E\xi(4\nu-\xi)}{(\nu+1)(4\nu-3)}e^{-\xi}$

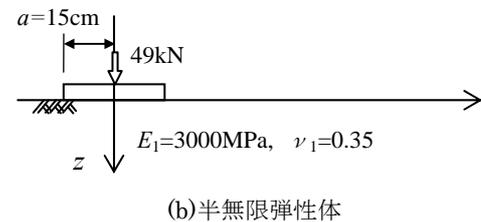
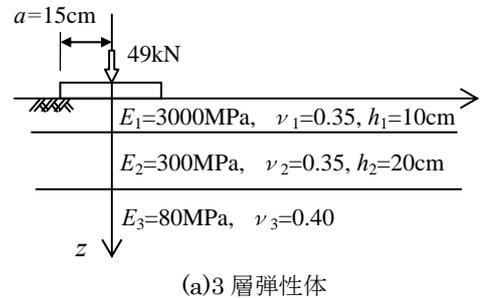
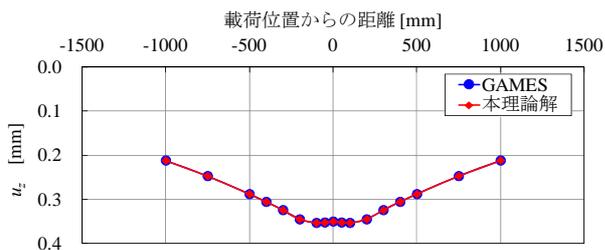
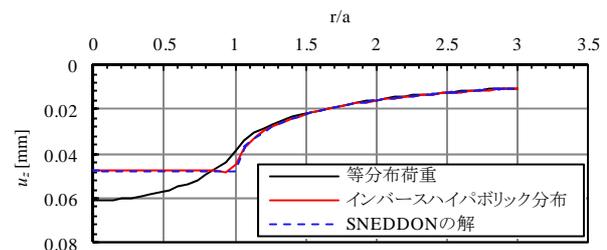


図-1 計算モデル



(a)3層弾性体



(b)半無限弾性体

図-2 計算結果