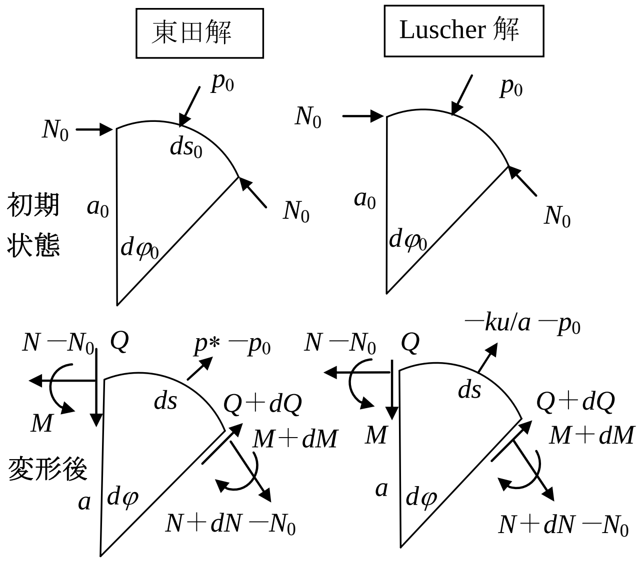
ばねモデルによる地中埋設管のバックリング解に対する批判的検討

Buried Pipe Research Center・大阪市立大学　東田　淳

まえがき　土と構造物の相互作用を解釈するモデルには，連続体モデルとばねモデルの 2 つがあり，その妥当性をめぐって論争が続いている。著者は，埋設管の新設時と地震時の土圧と変形挙動[1)2)]，ならびに極薄肉埋設管のバックリング挙動[3)]に対する連続体モデルの解を導き，現場実験，遠心実験，重力場の模型実験の測定データとの照合から，相互作用を解釈するモデルとしては連続体モデルの方が正当であることを指摘してきた。

極薄肉管の地中バックリングは，これまで高盛土下に埋設されるたわみ性排水管で発生事例がある以外はそれほど問題となることは無かったが，最近，プラスチック製の内巻きライナーによって老朽管きょを更生する工法が用いられるようになり，外側の既設管きょが更生後の経年劣化により曲げ剛性を完全に失った状態(終局状態)に達した時の内巻きライナー管の地中バックリングに対する安定性が検討課題となっている。内巻きライナー管の地中バックリングを扱っている設計基準には ASTM の更生管基準[4)] (Fully deteriorated design condition)があるが，この基準は問題のあるばねモデルに基づいており，信頼性に欠ける。本報告では，Luscher & Höeg が導いたばねモデル解 (Luscher 解)[5)]と著者が導いた連続体モデルのバックリング解(東田解)[3)]を比較し，ASTM 基準が依拠するばねモデル解の問題点を具体的に指摘する。



図−1 東田解と Luscher 解の釣合い状態

解の誘導過程の対比　**図−1** に東田解と Luscher 解が仮定する釣合い状態を示す。Luscher 解の記号は比較しやすいように東田解に揃えた(注)参照)。両者とも，等方圧 p_0 と軸力 N_0 が釣合った初期状態(変形前)から，バックリングが生じて変形後の釣合い状態に移ると考え，変形後の座標に関する断面力の釣合い式を変形前の座標に変換して変位に関する微分方程式を導き，この解からバックリングの波数 n_{cr} を求める。

表−1　東田解と Luscher 解の誘導過程と結果

	東田解		Luscher 解	
釣合い式	$dN/d\varphi+Q=0,\ dM/d\varphi-Qa=0$	①	$dN/d\varphi+Q=0,\ dM/d\varphi-Qa=0$	①’
	$\mathrm{d}Q/\mathrm{d}\varphi-(N-N_0)+(p^*-p_0)a=0$	②	$dQ/d\varphi-(N-N_0)-(ku/a+p_0)a=0$	②’
微分方程式	$u_5+u_3\{2+N_0/(\boldsymbol{m}a_0^2)\}$ $+u_1\{1+N_0/(\boldsymbol{m}a_0^2)\}-p_1^*/\boldsymbol{m}=0$	③	$u_5+u_3\{2+N_0/(\boldsymbol{m}a_0^2)\}$ $+u_1\{1+N_0/(\boldsymbol{m}a_0^2)+k/(\boldsymbol{m}a_0)\}=0$	③’
p_0	$p_0=N_0/a_0=\boldsymbol{m}(n^2-1)a_0$ $+2\mu/\{(2n+1)-2\nu(n+1)\}$	④	$p_0=N_0/a_0=\boldsymbol{m}(n^2-1)a_0+k/(n^2-1)$	④’
n_{cr}	$n_{cr}=[E_s/\{4(1-\nu_s^2)S_p\}]^{1/3}$	⑤	$n_{cr}=[(k/S_p)^{1/2}+1]^{1/2}\fallingdotseq[k/S_p]^{1/4}$	⑤’

表−1 に両者の解の釣合い式，変位に関する微分方程式，等方圧 p_0，および波数 n_{cr} を示す。p_0 に $n=n_{cr}$ を代入して得られる p_0 の最小値がバックリング圧力である。

両者の解を比べると，M と N に関する釣合い式①①’は同じ

注）　文献 5)に示された Luscher 解は，微小項の無視と座標変換の過程に疑問があり，③’式の u_1 の{ }内の $N_0/(\boldsymbol{m}a_0^2)$ が省略されている。そのため，⑤’の $n_{cr}=[(k/S_p)^{1/2}+1]^{1/2}$ とは異なる式(文献 5)の式(26): $n_{cr}=[k/S_p+1]^{1/4}$)が示され，バックリング圧力も $n_{cr}=[(k/S_p)^{1/2}+1]^{1/2}$ を④’に代入して得られる p_0 とは異なる(文献 5)の式(25): $p_0=2/S_p\cdot[(k/S_p+1)^{1/2}-1]$)。⑤’において $k/S_p\gg1$ の関係から得られる $n_{cr}\fallingdotseq[k/S_p]^{1/4}$ を④’に代入してバックリング圧力 $p_0=2[kS_p]^{1/2}$ が得られ，初めて文献 5)の式(27)(28)と一致する。ここでは東田解の誘導過程に沿って解き直した解を Luscher 解と呼ぶ。

キーワード: 埋設管きょ，地中バックリング，連続体モデル，ばねモデル

連絡先: 橿原市鳥屋町 24-7 エスペランサ森川 II 202 号, Buried Pipe Research Center, TEL & FAX: 0744-35-5007

であるが, Q に関する釣合い式②②’中の変形後に付加される新たな外力項が, 東田解では p^*, Luscher 解では－ku/a と異なる。東田解の p^*は Airy の応力関数を用いて管面の滑動条件(τ＝0), 無限遠方の境界条件, ならびに土要素の弾性定数 E_s・ν_s から決定される。一方, Luscher 解の付加外力は u/a に比例すると仮定される。ここに, k は比例定数で応力単位を持つ地盤のばね定数, u は管の法線方向変位, a は変形後の管の半径である。

これらの釣合い式を, 変形後から初期状態への座標変換, 初期状態における断面力(M, N, Q)と法線方向・接線方向の変位(u, v)の関係式, および不伸張変形の仮定(中立軸のひずみがゼロ)を用いて書き直すと, 変位 u に関する微分方程式③③’が得られる。表-1 では, 角度φ_0に関する u の i 次導関数を u_i と表している。また $\boldsymbol{m}=S_p/a_0$ であり, $S_p=E_p t^3/\{12(1-\nu_p^2)\, a_0^3\}$は管の曲げ剛性, E_p・ν_p: 管材料のヤング率とポアソン比, t: 管厚である。

変位の微分方程式から得られる p_0は, 東田解では管面の滑動条件(τ＝0)から, また Luscher 解では $u_0=c_1\sin n\varphi_0$ と置くことにより, それぞれ式④④’で表され, その最小値を与える n_{cr} が $\mathrm{d}p_0/\mathrm{d}n=0$ から式⑤⑤’のように求められる。バックリング圧力は⑤⑤’を④④’へ代入して得られる。

このように両者の解とも, 波数 n_{cr} は土の弾性定数またはばね定数と管の曲げ剛性 S_p の比の関数として表されるが, n_{cr} の累指数が異なるので, 如何なる補正を加えても両者の解が一致することは理論的にあり得ない。

東田解の実験による検証　東田解の妥当性は文献 3)の実験によって検証されている。この実験では, アルミ製の管(外径 83.6 mm, 管厚 0.144 mm, 管厚精度±0.002 mm, 長さ 109 mm, S_p=0.27 kPa)を, 乾燥砂地盤中に埋め, 側方変位を拘束した平面ひずみ K_0 条件で管がバックリングするまで地盤を 2 枚の載荷板によって圧縮した。容器内面にはリュブリケーションを施した。実験中に測定した載荷応力σ_1, 側方応力σ_3, ならびに地盤の圧縮ひずみε_1を, フックの法則に代入して地盤材料の変形係数 E_s とポアソン比ν_s が求まる。表-2 に実験結果と東田解との比較を示す。表は左から管がバックリングした時の載荷応力σ_1, σ_1 における E_s, ν_s(σ_1 によらず一定), 東田解によって計算された n, 平均偶数 n(対称条件から n は偶数), 平均バックリング圧力 p_0, 載荷応力σ_1に相当する理論境界応力σ_0 をそれぞれ示す。東田解による境界応力σ_0 の値は管がバックリングした時の載荷応力σ_1 の値とほぼ一致し, 解の妥当性が確かめられた。

表-2　実験結果と東田解の比較

バックリング時の載荷応力 σ_1 (kPa)	E_s (MPa)	ν_s	バックリングの波数 n	平均偶数 n	バックリング圧力 p_0 (kPa)	東田解による境界応力 σ_0 (kPa)
439	12.05	0.29	23.1	24	432	439
463	12.74	0.29	23.5			457

ばねモデル解の問題点　ばねモデル解で問題なのは, 変形後の土圧の変化を周囲の土の応力状態とは無関係に u/a に比例すると仮定したこと, および k が工学量で, 地盤定数でないため, 値を決定することができないことである。まず, 連続体モデルによる解では, 管の半径方向変位は $u=\Sigma U_n\cos n\theta$, 管に働く垂直土圧$\sigma(=p^*)=\Sigma A_n U_n \cos n\theta$と表わされる。ここに U_n と A_n は応力関数の係数と n(4 以上の偶数)を含む係数である。これらは級数形で表わされており, u とσ の比例関係は成立しない。つまり$\sigma=A_4U_4\cos 4\theta+A_6U_6\cos 6\theta+\cdots+A_nU_n\cos n\theta$ において $A_4\neq A_6\neq\cdots\neq A_n$ であり, これらは定数ではないので, $\sigma(=-ku/a)=-k/a\cdot\Sigma U_n\cos n\theta$が成立しないことは明らかである。さらに k は地盤定数ではないため, 値を合理的に決定できない。そこで試みに, 実験[3]で得られた n＝24 を Luscher 解: $n_{cr}\fallingdotseq[k/S_p]^{1/4}$ に代入して求めた k, および道路橋示方書[6]と農水基準[7]に実務上の設計定数として規定されている k を用いてバックリング圧力 p_0 を算定し, 結果を表-3 に示した。算定された p_0 は実験 p_0 よりもはるかに小さく, 実際とは大きく異なる結果となることが分かる。

以上の検討から, ばねモデル解は合理性に欠けることが明らかであり, ASTM 基準[4]はもとより, ばね定数を用いる他の設計法(例えば応答変位法)も同様であると言わざるを得ない。

表-3　各種 k によるバックリング圧力 p_0 の試算

	k (MPa)	n_{cr}	ﾊﾞｯｸﾘﾝｸﾞ圧力 p_0 (kPa)	実験 p_0 との比
n_{cr}=24 使用	89	24	154	1/2.8
道路橋示方書*	16	16	132	1/3.3
農水基準**	4	12	65	1/6.6

* k_h(水平方向地盤反力係数)＝$k_{ho}(B_h/30)^{-3/4}$, $B_h=(A_h)^{1/2}$, $A_h=D\times B$(=8.36 cm×10.9 cm), $k_{ho}=\alpha E_0/30$, α=4, E_0：表-2 の E_s, $k=ak_h$ とした。**$k=e_0$ とした。

参考文献　1)東田他(1986): 弾性論による埋設管の土圧の検討, 土木学会論文報告集, 第 376 号/III-6, pp.181-190. 2)東田他(2012): 連続体モデルに基づく円形管きょの断面方向耐震設計法の提案, 67 回土木年講(投稿中). 3)東田(2001): 弾性論による地中埋設管のバックリング挙動の検討, 地盤工学会, 土と基礎, Vol.49, No.4, Ser. No.519, pp.19-22. 4) ASTM (2010): F1216-09 Standard practice for rehabilitation of existing pipelines and conduits by the inversion and curing of a resin-impregnated tube etc.. 5) Luscer & Höeg (1964): The interaction between a structural tube and the surrounding soil, Rep. RTD TDR-63-3109, Air Force Weapon Lab.. 6) 日本道路協会(1996): 道路橋示方書・同解説. 7)農水省・農業農村工学会(2009): 土地改良事業計画設計基準及び運用・解説, 設計「パイプライン」.