

# CIVA-安定化有限要素法による浅水長波流れ解析

中央大学 学生員 高橋 佑典  
 中央大学 正会員 櫻山 和男  
 日本工営(株) 正会員 桜庭 雅明

## 1. はじめに

津波や高潮などの数値解析には、支配方程式として浅水長波方程式が一般に用いられており、様々な手法が提案されている。中でも、有限要素法は複雑な地形形状への適合性に優れ、かつメッシュの粗密づけも柔軟にできるため、複雑地形を有する広域の解析手法として有効であると言える。しかし、構造物の形状を考慮した津波遡上解析を行う場合、陸上部においてはかなり微細なメッシュが必要となる。

そこで、本研究では比較的粗いメッシュを用いる沖合領域と、微細メッシュを用いる沿岸および陸上領域に分け、その境界で解を接続する手法<sup>1)</sup>を用いて解析を行い、その有効性を検討した。なお、離散化手法としては、CIVA-安定化有限要素法<sup>1)</sup>を用いた。数値解析例として孤立波遡上問題、水柱崩壊問題を取り上げ本手法の有効性の検討を行った。

## 2. 数値解析手法

### (1) 支配方程式

支配方程式には、以下に示す浅水長波方程式を用いる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}h) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{u}h)}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(\mathbf{u}h) + (\mathbf{u}h) \cdot \nabla \mathbf{u} + c^2 \nabla(h+z) + \frac{gn^2 \mathbf{u} \|\mathbf{u}\|}{h^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad (2)$$

ここで、 $h$  は全水深、 $\mathbf{u}$  は断面平均流速、 $c$  は波速、 $z$  は地盤高さ、 $g$  は重力加速度、 $n$  は Manning の粗度係数である。

Time Splitting 法により式(1)、(2)を移流ステップと非移流ステップの2段階に分離すると、以下の式が得られる。  
 移流ステップ

$$\frac{\partial(\mathbf{u}h)}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(\mathbf{u}h) = 0 \quad (3)$$

非移流ステップ

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}h) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{u}h)}{\partial t} + (\mathbf{u}h) \cdot \nabla \cdot \mathbf{u} + c^2 \nabla(h+z) + \frac{gn^2 \mathbf{u} \|\mathbf{u}\|}{h^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad (5)$$

式(3)にCIVA法<sup>2)</sup>を適用し、式(4)、(5)にはSUPG法に基づく安定化有限要素法を適用することで、解を求める。非移流ステップにおける時間方向の離散化には、2次精度を有するCrank-Nicolson法を用いた。

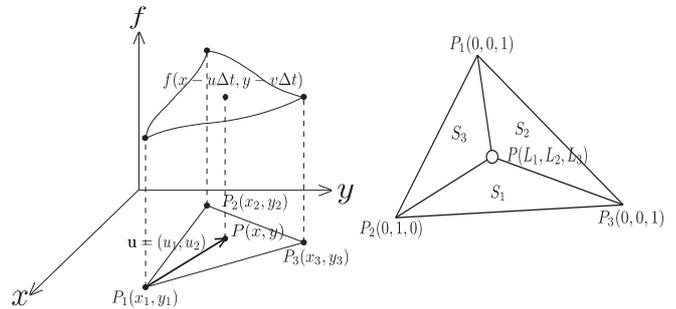


図-1 CIVA法の概念図

図-2 面積座標

### (2) CIVA法

CIVA法は、移流方程式の高精度解法であるCIP法を三角形要素に拡張した手法である。

$$f^{n+1}(\mathbf{x}, t) = f^n(\mathbf{x} - \mathbf{u}\Delta t, t - \Delta t) \quad (6)$$

式(6)は移流方程式の厳密解であり、CIVA法では $f^{n+1}$ の解を上流側の点 $f^n$ により求める。その際、 $f^n$ の値は上流側要素に張った三次曲面により補間を行う(図-1)。なお、上流側要素に対する高次補間多項式は、式(7)で表される。

$$(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i L_i + d \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^3 \beta_{jk} \left( L_j^2 L_k + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) \quad (7)$$

ここで、 $L_i$  は面積座標(図-2)、 $d$  は1次補間の場合に0、3次補間の場合には1となる係数である。また、 $\alpha_i, \beta_{jk}$  は係数であり、上流側の三角形要素の物理量 $f$ とその空間微係数を用いて算出する。

### (3) 解接続手法

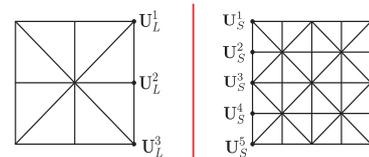


図-3 解接続手法概念図

本手法は、有限要素分割の粗いメッシュ領域と、有限要素分割の細かいメッシュ領域を用意し、互いの領域の境界上で、接続を行うものである(図-3)。このとき、接続境界上で適合条件を満たす必要があり、例として、図-3の場合を以下に示す。

$$\begin{aligned} U_L^1 &= U_S^1, U_L^2 = U_S^3, U_L^3 = U_S^5 \\ U_S^2 &= \alpha U_L^1 + \beta U_L^3 \\ U_S^4 &= \alpha U_L^3 + \beta U_L^5 \end{aligned}$$

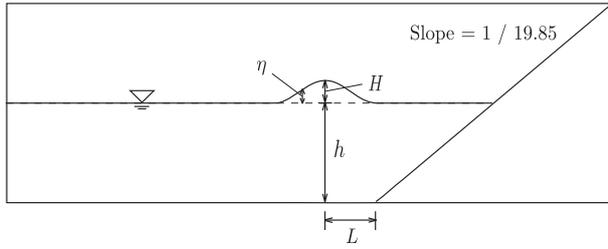


図-4 Synolakis の水理実験モデル (初期状態)

ここに、 $U$  は物理量 (全水深, 断面平均流速), 上添え字は各領域の節点番号, 下添え字  $L, S$  はそれぞれ粗メッシュ領域, 細メッシュ領域に属する物理量を表す.  $\alpha, \beta$  は接続境界上の節点間距離により決定される係数で, 接続境界上で粗メッシュ側の節点の間に細メッシュ側の節点が複数存在する場合でも, 線形補間による接続が可能となる.

3. 数値解析例

本手法の妥当性と有効性を検討するために, 孤立波遡上問題, 水柱崩壊問題を取り上げた.

(1) 孤立波遡上問題

孤立波遡上問題として, Synolakis の水理実験モデル<sup>3)</sup>(図-4) を取り上げる.  $L$  は孤立波の半波長で, 波高水深比  $H/h$  を 0.3, Manning の粗度係数を  $0.01 \text{ ms}^{-\frac{1}{3}}$  とした. なお, 斜面の勾配は  $1/19.85$  である. 解析に用いたメッシュは  $x, y$  方向分割幅が 0.005 m であり, 微小時間増分を  $0.005 \text{ s}$  として, 解析を行った.

無次元化した解析時間  $t' (= t\sqrt{g/h})$  が 25, 40 の際の水面形状を図-5, 図-6 にそれぞれ示す. 実験値とは波形や遡上高さで差異が生じているが, これは波の分散性を考慮していないためであると考えられる. また, 従来の SUPG 法に基づく安定化有限要素法の解析結果と比べ, 本手法では, 波形がより鋭く前傾し, 波の非線形性を良好に表現できていることが確認された.

(2) 水柱崩壊問題

解接続手法の妥当性の検証のため, 図-7 に示す水柱崩壊問題を取り上げる. 直径 11 m, 水位差 0.6 m の円形の水柱を初期条件として与え, 壁面での境界条件として Slip 条件を与えた. また, 図-8 は, 解析に用いたメッシュであり,  $x$  方向, 及び  $y$  方向要素分割幅 1 m の粗いメッシュを用いる領域と,  $x$  方向, 及び  $y$  方向要素分割幅 0.1 m の細かいメッシュを用いる領域とで構成されている. この2つの領域を接続し, 微小時間増分を  $0.005 \text{ s}$  として, 解析を行った.

解析時間 1 s, 5 s における水面形状を図-9, 図-10 にそれぞれ示す. 解接続手法を用いることで, 時間の経過に伴う水面形状の等方的な拡がりを捉えられていることが確認された. また, 接続境界における解の不連続性を生じることなく, 解析を行うことが可能であることが併せて確認された.

4. おわりに

本論文では解接続手法を用いた CIVA-安定化有限要素法に基づく津波解析手法による解析を行い, その妥当性と有

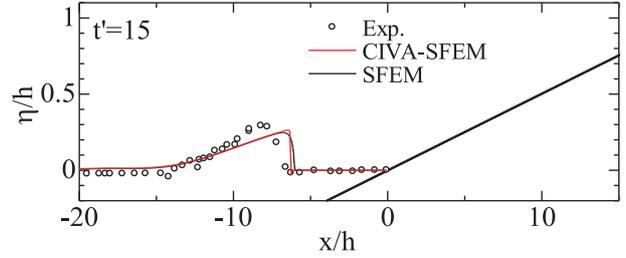


図-5  $t' = 15$  における水面形状

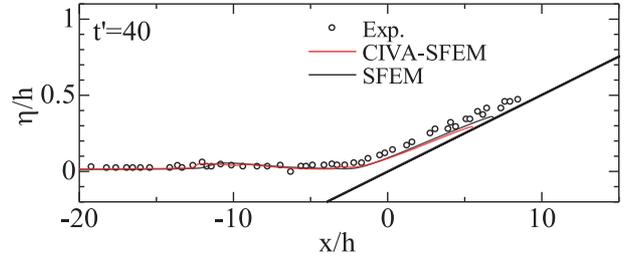


図-6  $t' = 40$  における水面形状

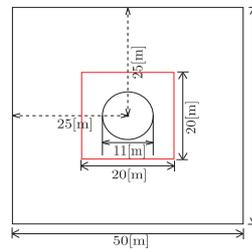


図-7 解析モデル

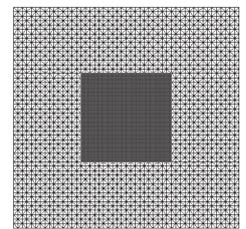


図-8 解析に用いたメッシュ

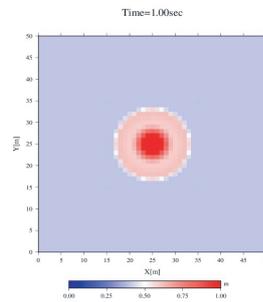


図-9 1 s 時の水面形状

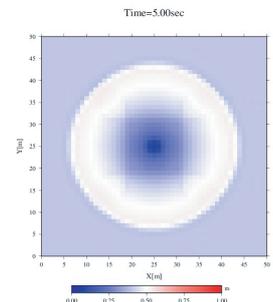


図-10 5 s 時の水面形状

効性について検討した. その結果, 本手法による解析は, 波の非線形性による波形の前傾化が良好に表現されていることが確認された. また, 解接続手法において, 粗いメッシュと細かいメッシュの要素幅に 10 倍程度の差があっても, 安定に解析を行うことが可能であり, 本手法の妥当性と有効性が確認された.

今後の課題として, 広域の津波遡上問題への適用が挙げられる.

参考文献

- 1) 唐木田泰久, 櫻山和男: 移動境界を考慮した CIVA-安定化有限要素法による高潮氾濫解析, 日本計算工学会講演会論文集, Vol.11, No.1, pp.221-224, 2006.
- 2) 田中伸厚: 数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発, 日本機械学会論文集 (B 編), Vol.64, No.620, pp.103-110, 1998.
- 3) Synolakis, C.E.: The runup of solitary waves, *J. Fluid Mech.*, Vol.185, pp.523-545, 1987.