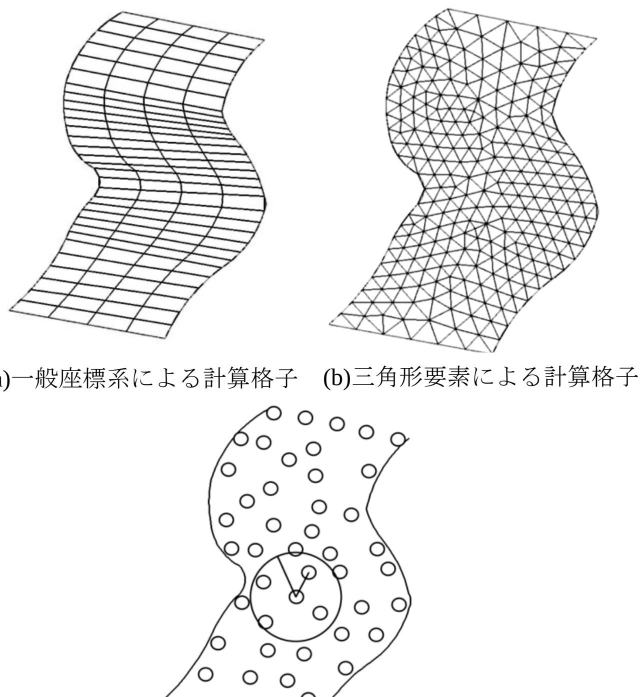
SPH 補間スキームを用いた 1 次元浅水方程式のオイラー的解法

防衛大学校　　学生会員　○浦川　翔大
防衛大学校　　　正会員　　多田　　毅

1．緒言

数値計算において通常，図-1 のように計算場に計算格子もしくは計算点を作成する．(a)に示す一般座標系の計算格子は有限差分法などで用いられ，(b)に示す三角形要素による計算格子は，有限要素法，有限体積法などに用いられる．(c)に示すような格子の生成を必要とせず計算点を場に散りばめる手法はメッシュフリー法と呼ばれ粒子法やエレメントフリーガラーキン法などに用いられている. 格子を生成しないメッシュフリー法には SPH（Smoothed Particle Hydrodynamics）[1)]，MPS（Moving particle semi-implicit)[2)]，FPM（Finite Point Method）[3)]，エレメントフリーガラーキン法などがあるが, 日本では流体計算には主に SPH や MPS が用いられている．SPH 粒子法の特徴は, 他のメッシュフリー法で相互作用や重み付き平均などの重み関数として用いられるものを物理量の分布関数として扱うことにある．SPH 粒子法はラグラジュ的手法として開発され, 様々な分野への発展を遂げている．しかし，メッシュフリー法はオイラー的にもラグランジュ的にも解くことが可能なはずである．実際 FPM も当初，オイラー的解法として開発され，ラグランジュ的手法への拡張が図られている. 以上のことから，SPH 粒子法をオイラー的に用いることで，粒子法の計算点の作成の容易さやリメッシュの容易さといったメリットを生かしつつ, 粒子法におけるデメリットである粒子探索における計算コストを削減することが期待できる．そこで本研究では，1 次元浅水流方程式を基礎式として SPH 粒子法のオイラー的解法の検討を行った.



(a)一般座標系による計算格子　(b)三角形要素による計算格子

(c)メッシュフリー法による計算点

図—1　計算格子と粒子法による計算点の概念

2．基礎方程式と離散化手法

(1) 基礎方程式

本研究では，比較的シンプルで誤差評価の実績も多いことから, 次式で表される一次元浅水流方程式を基礎方程式とした．摩擦項，分散項などは考慮していない.

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(hu)=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\mathrm{u}\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{g}\frac{\partial}{\partial x}(h+z)=0 \tag{2}$$

ここで，hは全水深，uは平均流速，zは地盤高である.

(2) Smoothed Particle Hydrodynamics

SPH 法は Monaghan ら(1974)によって開発された粒子法の代表的手法であり，有限個の粒子により空間を離散化し，物理量を kernel 関数と呼ばれる平滑化関数を用いて近似を行う．ある粒子の物理量はその粒子の周囲の粒子の影響範囲で物理量を足し合わせることにより表現される．物理量の勾配を算出する際には kernel 関数を微分したものの総和を用いる.

$$\hbar_i=\sum_j V_j\, w\left(x_i-x_j,l_j\right) \tag{3}$$

$$\nabla\hbar_i=\sum_j V_j\, \nabla w\left(x_i-x_j,l_j\right) \tag{4}$$

キーワード　粒子法　Smoothed Particle Hydrodynamics　SPH　浅水流方程式　オイラー的解法
連絡先　〒239-8686 神奈川県横須賀市走水 1-10-20　防衛大学校　土木環境工学　TEL 0468-41-3810　(内線 3524)

ここで，h_iはx_iの位置での全水深，V_jはx_jの位置での粒子の体積，l_jはその粒子のスムージング長である．

また，SPH 粒子法では，その計算量の大半が周辺粒子探索とその粒子間距離の計算に割かれており，粒子数が増加するとその計算量は指数的に増加する．しかし，オイラー的に解いた場合は計算点である粒子が固定されているので，粒子探索と距離判定を一度行えばそれ以降の計算に同じ結果を用いることができ，ラグランジュ的に解く場合よりも計算量を大幅に減らすことができる．

3． 計算条件および結果

(1)補正手法の選択

SPH には一般に深刻な離散化誤差が存在し，さらにwと∇wとではその誤差が異なるため，何らかの補正を加えない限りwの近似誤差，∇wの近似誤差，さらに両者の整合性が保たれないという問題があるため，kernel 関数による物理量の SPH 補間スキームに補正が必要である．その手法は複数存在するが， 本研究では MSPH[4]を基にした手法を用いた．Taylor 展開を用いた行列式を解くことにより kernel 関数の 0 階，1 階，2 階微分のコンシステンシーの補正を行う手法である．

(2) Kernel 関数の選択

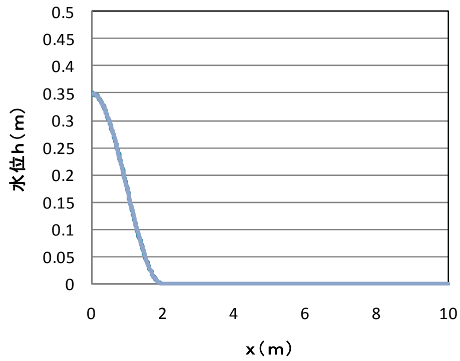
多くの研究において Gaussian カーネルまたは 4 次 Spline カーネルなどが使用されているが，本研究では 3 次 Spiky カーネルを使用した．

(3)結果

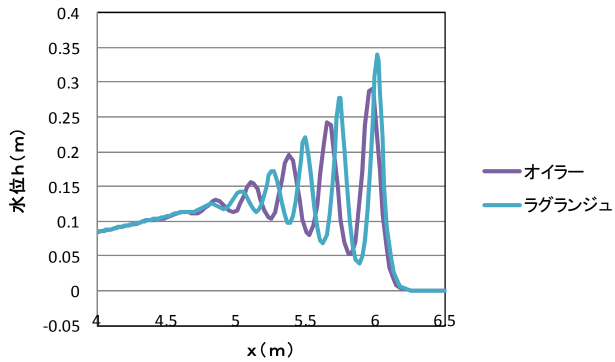
水路長 10m，水深 0.4m で両端を壁面とした水路での孤立波の計算を幾つかのケースについて実施した．初期粒子間隔 0.025m，初期スムージング長 0.075m，時間刻み 0.01s，粒子数 400 である．その結果の例を図-3,4 に示す．基本的に差分法で得られる結果と同等の挙動を示した．数値分散の波数が異なっているのはラグランジュ的手法の粒子の移動による粒子の偏りによるものと考えられる．

4． 結言

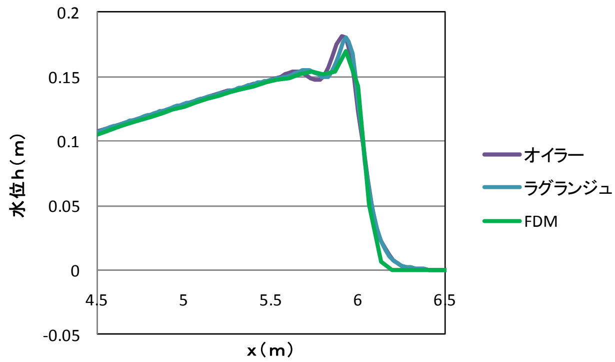
ラグランジュ的手法として用いられている SPH 粒子法の kernel 補間の考え方を利用した浅水流方程式のオイラー的解法を検討した．その結果，ラグランジュ的手法と同等の結果が得られることが分かった．今後は，問題の性質に応じて，オイラー的解法とラグランジュ的解法を使い分けることで，SPH の応用範囲を広げることが可能となる．



図—2　初期水位



図—3　オイラー的解法とラグランジュ的解法の数値分散の比較（時刻 t=0.2s，粘性なし）



図—4　計算結果の比較（時刻 t=0.2s，粘性付加）

参考文献

1) Gingold,R.A. and Monaghan,J.J., Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society,181,pp.375-389,1977
2)Koshizuka, S and Oka,Y : Moving Particle Semiimplicit Method for Fragmentation of Incompressible Fluid, Nucl.Sci Eng. 123, pp.421-434, 1996
3)E.Onate et al. : A Finite Point Method in computational mechanics.Applications to convective transport and fluid flow, international journal for numerical methods in engineering, 39, 3839-3866, 1996.
4)G.M.Zhang ・ R.C.Batra : Modified smoothed particle hydrodynamics method and its application to transient problems, Computational Mechanics, 34, 137-146, 2004.