転波列性土砂流サージの波動方程式に関する一検討

名城大学理工学部　正会員　新井宗之
愛知工科大学　フェロー　安田孝志

1．はじめに

中国・雲南省の蒋家溝で観測される粘性土石流と呼ばれる多数のサージ状の流下現象が間欠的な転波列性サージとして知られている．日本の鹿児島県・桜島の野尻川等，またオーストリアの西部山間部で転波列性サージが観測されている．これらの波動性についてはまだ十分に明らかにされていない．本研究では，このような土砂を高濃度に含有した流れに関する山地河道流下における波動方程式を明らかにすることを目的としている．

2．基礎方程式

流体の波動現象における波動方程式の導出と同様な手法で，以下検討する．流体の流下現象において，非圧縮 ($\mathrm{div}\vec{v} = 0$)，非回転 ($\mathrm{rot}\vec{v} = 0$) 現象として取り扱うと，速度ポテンシャル ϕ が導入でき流下方向を x，その水深方向を y とすると次式の関係がある．

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

水深方向の流速成分を v とすると，水底 ($y = -h_0$) での境界条件は，

$$v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

水面の静止状態からのずれ $\eta(x, t)$ が，水面の流体とともに動く条件から，

$$v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} \tag{3}$$

流れを伴わない水面上の流体で，表面張力を無視し，水面で圧力が連続する条件として，ベルヌーイの定理が用いられる．あるいは，バーガース (Burgers) 方程式では

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4}$$

とする形式の運動方程式が用いられるが，ここでは，運動方程式，連続式について，運動量補正係数を $\beta = 1$ とした浅水流方程式の次式を基に検討する．

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = g\sin\theta - g\cos\theta\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{f'}{2}\frac{u^2}{R} \tag{5}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (Au)}{\partial x} = 0 \tag{6}$$

ここに，u ：x 方向の断面平均流速，A ：流積，g ：重力加速度，θ : 水路勾配，R ：径深，h ：水深，β ：運動量補正係数，f' ：摩擦損失係数．ここでは，さらに，水深 h に比して水路幅 B が広い矩形断面の一様水路で，径深 R が $R \doteq h$ として取り扱う．また，微小振幅の波として，右辺第 3 項の径深 R は平均水深 h_0，摩擦損失係数 f' は水深の関数であるが平均水深に基づく定数と仮定する．したがって，式 (5)，(6) は次式のようである．

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial\left(u^2\right)}{\partial x} = g\sin\theta - g\cos\theta\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{f'}{2}\frac{u^2}{h_0} \tag{7}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} = 0 \tag{8}$$

流速係数 $\varphi = \dfrac{u}{u_*}$ ，摩擦損失係数 f' と摩擦速度 u_* との関係 $\dfrac{f'}{2} = \left(\dfrac{u_*}{u}\right)^2$ より，右辺第 3 項を

$$\frac{f'}{2}\frac{u^2}{h_0} = \frac{u_*}{2\varphi h_0}u$$

とする．また，速度ポテンシャル ϕ を用いると式 (7) は次式のように表すことができる．

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right\} - g\sin\theta + g\cos\theta\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{u_*}{2\varphi h_0}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = 0 \tag{9}$$

上式を積分すると

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - g\sin\theta + g\cos\theta\, h + \frac{u_*}{2\varphi h_0}\phi = 0 \tag{10}$$

である．

3．逓減摂動法による波動方程式の検討

ここで，Gardner-Morikawa 変換

$$\xi = \epsilon^{\frac{1}{2}}\left(x - v_{p0}t\right) \tag{11}$$

$$\tau = \epsilon^{\frac{3}{2}}t \tag{12}$$

$$\text{ここに，} v_{p0} = \sqrt{gh_0\cos\theta} \tag{13}$$

を用いる．したがって，

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \epsilon^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} = -v_{p0}\epsilon^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial\tau}{\partial t} = \epsilon^{\frac{3}{2}}$$

である．逓減摂動展開は、平均水深 h_0 からの変動量 η および ϕ について

$$\eta = \epsilon\eta^{(1)}(\xi,\tau) + \epsilon^2\eta^{(2)}(\xi,\tau) + \cdots \tag{14}$$

$$\phi = \epsilon^{\frac{1}{2}}\left\{\phi^{(1)}(\xi, y, \tau) + \epsilon\phi^{(2)}(\xi, y, \tau) + \cdots\right\} \tag{15}$$

である．また、$y = 0$ の近傍で、Boussinesq の Taylor 展開では、

$$\phi(\xi, y, \tau) = \left\{\phi(\xi, 0, \tau) + \eta\frac{\partial\phi(\xi, 0, \tau)}{\partial y} + \frac{\eta^2}{2}\frac{\partial^2\phi(\xi, 0, \tau)}{\partial y^2} + \cdots\right\} \tag{16}$$

Keyword : 波動方程式，転波列，土石流，土砂流，理論
〒 468-8502 愛知県名古屋市天白区塩釜口 1-501 Tel: 052-832-1151

である．これらより，式 (1) は，

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \epsilon^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial\xi^2}+\epsilon\frac{\partial^2\phi^{(2)}}{\partial\xi^2}+\epsilon^2\frac{\partial^2\phi^{(3)}}{\partial\xi^2}+\cdots\right) +\epsilon^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial y^2}+\epsilon\frac{\partial^2\phi^{(2)}}{\partial y^2}+\epsilon^2\frac{\partial^2\phi^{(3)}}{\partial y^2}+\cdots\right)=0 \tag{17}$$

である．式 (2) は，

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\epsilon^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial y}+\epsilon\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial y}+\epsilon^2\frac{\partial\phi^{(3)}}{\partial y}+\cdots\right)=0\ ,\ (y=-h_0) \tag{18}$$

である．式 (3) は，

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}\\
&=-\epsilon^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial y}+\epsilon\eta^{(1)}\frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial y^2}+\epsilon^2\eta^{(2)}\frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial y^2}+\cdots\right.\\
&\quad+\epsilon\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial y}+\epsilon^2\eta^{(1)}\frac{\partial^2\phi^{(2)}}{\partial y^2}+\epsilon^3\eta^{(2)}\frac{\partial^2\phi^{(2)}}{\partial y^2}+\cdots\\
&\quad\left.+\epsilon^2\frac{\partial\phi^{(3)}}{\partial y}+\epsilon^3\eta^{(1)}\frac{\partial^2\phi^{(3)}}{\partial y^2}+\epsilon^4\eta^{(2)}\frac{\partial^2\phi^{(3)}}{\partial y^2}+\cdots\right)\\
&-v_{p0}\epsilon^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial\xi}+\epsilon\frac{\partial\eta^{(2)}}{\partial\xi}+\cdots\right)\\
&+\epsilon^{\frac{5}{2}}\left(\frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial\tau}+\epsilon\frac{\partial\eta^{(2)}}{\partial\tau}+\cdots\right)\\
&+\epsilon^{\frac{5}{2}}\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\xi}\frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial\xi}+\epsilon\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\xi}\frac{\partial\eta^{(2)}}{\partial\xi}+\epsilon\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial\xi}\frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial\xi}\right.\\
&\quad\left.+\epsilon^2\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial\xi}\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial\xi}+\cdots\right)=0
\end{aligned} \tag{19}$$

である．式 (10) は，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2-g\sin\theta+g\cos\theta\, h+\frac{u_*}{2\,\varphi h_0}\phi\\
&=-v_{p0}\epsilon\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\xi}+\epsilon\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial\xi}+\epsilon^2\frac{\partial\phi^{(3)}}{\partial\xi}+\cdots\right)\\
&+\epsilon^2\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\tau}+\epsilon\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial\tau}+\cdots\right)\\
&+\frac{1}{2}\epsilon^2\left\{\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\xi}\right)^2+2\epsilon\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\xi}\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial\xi}+\epsilon^2\left(\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial\xi}\right)^2+\cdots\right\}\\
&-g\sin\theta\, x+g\cos\theta\left(h_0+\epsilon\eta^{(1)}+\epsilon^2\eta^{(2)}+\epsilon^3\eta^{(3)}+\cdots\right)\\
&+\frac{u_*}{2\varphi\, h_0}\left\{\epsilon^{\frac{1}{2}}\left(\phi^{(1)}+\epsilon\eta^{(1)}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial y}+\epsilon^2\eta^{(2)}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial y}+\cdots\right)\right.\\
&\quad\left.+\epsilon^{\frac{3}{2}}\left(\phi^{(2)}+\epsilon\eta^{(1)}\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial y}+\epsilon^2\eta^{(2)}\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial y}+\cdots\right)+\cdots\right\}=0
\end{aligned} \tag{20}$$

である．

以上の関係から，$O(\epsilon^0)$ 次の項は式 (20) より

$$-g\sin\theta x+g\cos\theta h_0=0 \tag{21}$$

$O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$ 次の項は，式 (17)~(20) より，

$$\frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial y^2}=0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial y}\ ,\ (\ y=-h_0\ ) \tag{23}$$

$$\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial y}\ ,\ (\ y=0\ ) \tag{24}$$

$$-v_{p0}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\xi}+g\cos\theta\eta^{(1)}+\frac{u_*}{2\varphi h_0}\phi^{(1)}=0 \tag{25}$$

$O(\epsilon^{\frac{3}{2}})$ 次の項は，式 (17)~(20) より，

$$\frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\phi^{(2)}}{\partial y^2}=0 \tag{26}$$

$$\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial y}\ ,\ (\ y=-h_0\ ) \tag{27}$$

$$-\eta^{(1)}\frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial y^2}-\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial y}-v_{p0}\frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial\xi}=0\ ,\ (\ y=0\ ) \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
&-v_{p0}\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\tau}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\xi}\right)^2+g\cos\eta^{(2)}\\
&+\frac{u_*}{2\varphi h_0}\left(\eta^{(1)}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial y}+\phi^{(2)}\right)=0
\end{aligned} \tag{29}$$

$O(\epsilon^{\frac{5}{2}})$ 次の項は，式 (17)~(20) より，

$$\frac{\partial^2\phi^{(2)}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\phi^{(3)}}{\partial y^2}=0 \tag{30}$$

$$\frac{\partial\phi^{(3)}}{\partial y}\ ,\ (\ y=-h_0\ ) \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
&-\eta^{(2)}\frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial y^2}-\eta^{(1)}\frac{\partial^2\phi^{(2)}}{\partial y^2}-\frac{\partial\phi^{(3)}}{\partial y}-v_{p0}\frac{\partial\eta^{(2)}}{\partial\xi}\\
&+\frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial\tau}+\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\xi}\frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial\xi}=0
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
&-v_{p0}\frac{\partial\phi(3)}{\partial\xi}+\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\xi}\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial\xi}+g\cos\theta\eta^{(3)}\\
&+\frac{u_*}{2\varphi h_0}\left(\eta^{(2)}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial y}+\eta^{(1)}\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial y}\right)=0
\end{aligned} \tag{33}$$

以上の関係から $u_*\ll v_{p0}$ としてこの項を無視すると次式を得る．

$$\frac{1}{v_{p0}}\frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial\tau}+\frac{3}{2}\frac{\eta^{(1)}}{h_0}\frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial\xi}-\frac{3}{2}h_0\frac{\partial^2\eta^{(1)}}{\partial\xi^2}-\frac{2\varphi v_{p0}}{u_*}{h_0}^2\frac{\partial^3\eta^{(1)}}{\partial\xi^3} = 0 \tag{34}$$

上式は，左辺第 2 項が非線形項で時間とともに種々の波数を生成する，第 3 項は散逸項で高周波の波形を低減させるとともに波形の急峻化をもたらす，第 4 項は波形の散逸項で，KdV 方程式ではソリトンの特性をもたらす項である．以上のように，式 (34) の波動方程式は非線形項，散逸項および散逸項を含む方程式となっている．

今後は上記波動方程式の解の特性を検討したい．

謝辞：この研究の遂行において京都大学防災研究所中川一先生，京都大学大学院農学研究科水山高久先生，立命館大学里深好文先生にご協力頂きました．ここに記して謝意を表します．