

B-spline Ritz 法による弾性基礎にある矩形厚板の三次元弾性解析

大分工業高等専門学校	学生会員	○大川 茉友子
大分工業高等専門学校	正 会 員	名 木 野 晴 暢
豊橋技術科学大学	正 会 員	樋 口 理 宏
豊橋技術科学大学	非 会 員	足 立 忠 晴
大同大学	正 会 員	水 澤 富 作
北海道大学	F 会 員	三 上 隆

1. まえがき

地盤－構造関連問題である弾性基礎上の矩形厚板の精確な力学的挙動を明らかにすることには，工学的に十分な意義があると考えられる．名木野ら^{1), 2), 3)}は，弾性基礎にある矩形厚板の静力学的特性（変形特性，変位や応力分布特性）を三次元弾性論に基づいて明らかにしてきた．しかし，これらの検討^{1), 2), 3)}は，Fourier 解析を用いた理論解析に基づいていた為，支持条件が周面単純支持に限定されていた．

本論文では，B-spline Ritz 法⁴⁾を用いて，弾性基礎にある矩形厚板の三次元弾性解析を行い，その静力学的特性に与える板厚，支持条件および面外荷重の状態の影響を明らかにすることを目的としている．

2. 弾性基礎にある矩形厚板の曲げ問題の定式化

図-1 には，物体力と表面力を受ける矩形厚板と直交座標系が示してある．ここで，三次元弾性論に従う均質・等方な矩形厚板は微小変形かつ線形弾性であるとする．また，弾性基礎は Winkler 基礎でモデル化し，これは板下面で滑らかに完全密着しているものとする．

弾性基礎にある矩形厚板の曲げ問題の定式化にあたり，無次元座標系 $\xi = x/a$, $\eta = y/b$, $\zeta = z/h$ を導入する．また，無次元変位 $U = u/a$, $V = v/a$, $W = w/a$ は，B-spline 関数の三重積で仮定する⁴⁾．

$\bar{U}$ を矩形厚板のひずみエネルギー， $\bar{V}$ を物体力と表面力による外力ポテンシャルとすれば，地盤－構造系の汎関数 Π は， $\Pi = \bar{U} - \bar{V}$ で表される．よって，汎関数 Π を極値化すれば，次式のような代数方程式を得る．

$$([K_p] + [K_f])\{\Delta\} = \{f\} \quad (1)$$

ただし， $[K_p]$ は矩形厚板の剛性マトリックス， $[K_f]$ は弾性基礎の剛性マトリックス， $\{f\}$ は外力ベクトルであり，

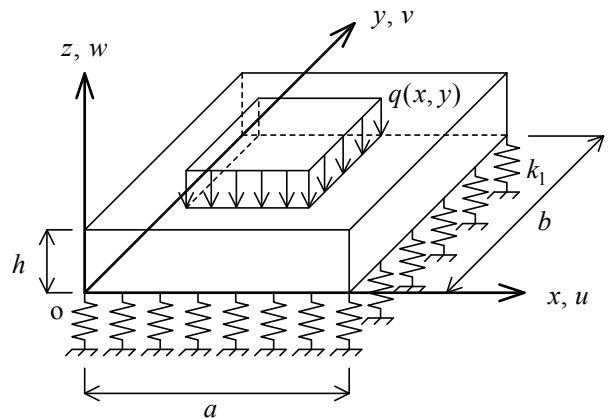


図-1 Winkler 基礎上の矩形厚板と直交座標系

$\{\Delta\}$ は未定係数ベクトルである．よって，式(1)を解けば，変位，応力やひずみエネルギーが求められる．

3. 数値計算例及び考察

ここでは，B-spline Ritz 法⁴⁾を用いて，弾性基礎にある矩形厚板の三次元弾性解析を行い，その板厚方向の応力分布に与える板厚比 h/a ，支持条件や面外荷重の状態の影響を明らかにする．数値計算では，辺長比 $b/a = 1$ とポアソン比 $\nu = 0.2$ に設定し，文献3) を参考にして，無次元地盤反力係数 $\Theta \equiv k_1 a / E = 10^{-2}$ を用いた．また，面外荷重は物体力 (Body) と全面等分布荷重 (Surface) とし，支持条件は周面単純支持 (SS-SS) と周面固定支持 (CC-CC) とした．

図-2 と図-3 には，それぞれ，中等厚板 ($h/a = 0.2$) と厚板 ($h/a = 0.5$) の板中央点 (ξ, η) = (0.5, 0.5) での板厚方向の応力 σ_x 分布が示してある．また，図-4 には，矩形板の各ひずみエネルギー成分（曲げ変形成分 U_b ，面外せん断変形成分 U_s ，面外伸縮変形成分 U_z および弾性エネルギー U_w ）に与える板厚比 h/a ，面外荷重の状態と支持条件の影響が示してある．

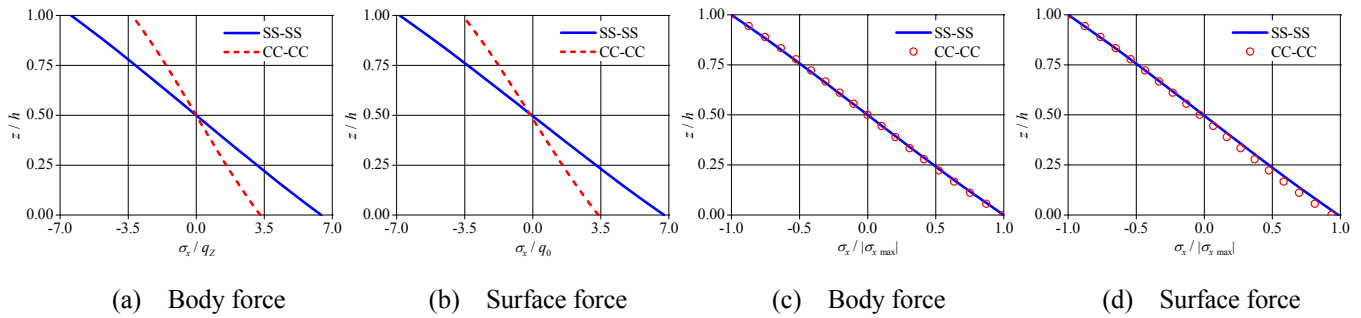
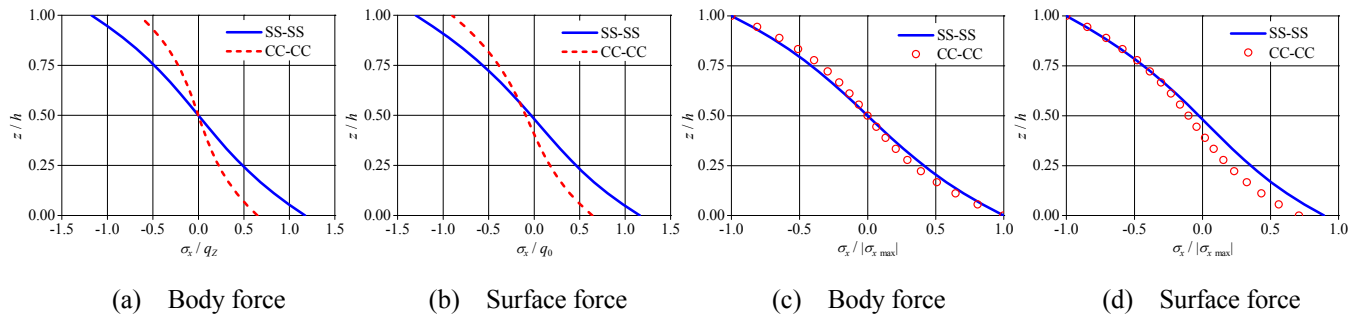
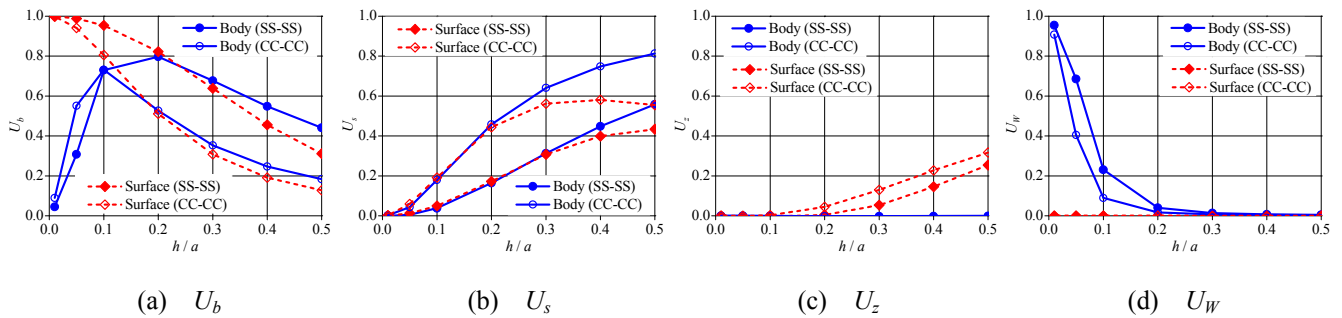
図-2 弾性基礎にある矩形中等厚板の板厚方向の応力 σ_x 分布： $h/a = 0.2$ 図-3 弾性基礎にある矩形厚板の板厚方向の応力 σ_x 分布： $h/a = 0.5$ 

図-4 弾性基礎にある矩形板の各ひずみエネルギー成分に与える板厚比，面外荷重の状態と支持条件の影響

図-2 より，中等厚板の板厚方向の応力分布は，面外荷重の状態と支持条件にかかわらず，板中央面に関して逆対称な直線分布である．また，応力分布に与える物体力と表面力（全面等分布荷重）の相違はほとんど無い為，Mindlin 理論の適用範囲内である可能性がある．

図-3 より，物体力を受ける厚板の板厚方向の応力分布は，支持条件にかかわらず，概ね板中央面に関して逆対称な曲線分布である．しかし，全面等分布荷重を受ける厚板の板厚方向の応力分布は，表面力の影響により，板中央面に関する対称性は失われる．また，周面固定厚板では，中立面の位置が板中央面の下方に移動しており，圧縮応力が支配的になる．

図-4 より，弾性基礎にある矩形厚板の曲げ変形成分 U_b は，支持条件に係わらず，板厚比 h/a が大きくなると減少するが，面外せん断変形成分 U_s は増大する．また，面外荷重の状態にかかわらず，拘束が大きいほど面外せん断変形が生じ易くなる．よって，弾性基礎

上にある矩形厚板の板厚方向の応力分布が曲線になる原因は，面外せん断変形成分 U_s の影響であることがわかる．さらに，応力分布の板中央面に関する対称性が失われる原因は，面外伸縮変形成分 U_z の影響によるものであり，これが物体力と表面力の相違である．

4. まとめ

本論文では，弾性基礎にある矩形厚板の板厚方向の応力分布特性に与える板厚，支持条件および面外荷重の状態の影響とひずみエネルギーを指標として，弾性基礎にある矩形板の変形特性を明らかにした．

参考文献

- 1) 名木野ら：応用力学論文集, Vol.12, pp.43-54, 2009.
- 2) 名木野ら：構造工学論文集, Vol.57A, pp.27-40, 2011.
- 3) 名木野ら：構造工学論文集, Vol.58A, pp.26-39, 2012.
- 4) Nagino et al.: J. Sound Vib., pp.329-353, 2008.