

直交異方性平板の三次元弾性解析に関する一考察

足利工業大学 正 会 員 ○ 末武 義崇

1. まえがき

異方性材料から成る平板については、従来から多くの研究報告^{1), 2)}がなされている。特に、複合材料が様々な分野で実用化されている現在、板やシェルについては積層板に関する研究が盛んに行われている。積層板を含む異方性板については、材料の異方性を考慮した上で、横せん断変形や板厚方向垂直応力の影響をどのように加味して板理論を構築していくかが研究の主眼であり、多くの平板理論が提案¹⁾されている。しかしながら、異方性を考慮した板・シェルを理論的に解析することは必ずしも容易ではなく、近年では、数値解析的なアプローチ²⁾によって解析上の困難を克服する試みが主体となっているようである。

平板の曲げ解析に当たっては、板厚方向の変位分布や応力分布に仮定を設け、2次元的に解析する方法と、平板全体を三次元弾性体と捉えて3次元的に解析する方法の2通りのアプローチが考えられる。板の材料を等方体と仮定する場合には、両者共に関数解析的な研究が試みられている。一方、異方性平板の三次元弾性解析については、そのほとんどが数値解析的なアプローチによるものであり、関数解析的な手法によって解析を行った研究例は極めて少ないのが現状である。

本研究では、直交異方性材料から成る矩形平板を解析対象とし、その理論解析を試みると共に、解析上の問題点について考察することを主たる目的としている。特に、解析を容易にするために、平板面内の一方向と板厚方向とから成る平面が等方面であると仮定し、独立な弾性定数の数をできる限り制限して解析を行う。解析に当たっては、Fourier 解析の手法を用い、板厚方向座標のみを変数とする連立常微分方程式を誘導し、その解を求めることとする。

2. 直交異方性材料の一般化 Hooke 則

本研究では、等方面を有する直交異方性材料から成る矩形平板を解析対象とする。例えば、図1に示したようなx方向に繊維補強された厚肉平板を想定した場合、y-z平面が等方面となるような直交異方性平板と見なすことができる。この場合、独立な弾性定数は5個であり、応力-ひずみ関係を表す一般化した Hooke の法則は、次式のように表すことができる。

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E'}\sigma_x - \frac{\nu'}{E'}\sigma_y - \frac{\nu'}{E'}\sigma_z, & \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G'} \\ \varepsilon_y = \frac{\nu'}{E'}\sigma_x - \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z, & \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z = \frac{\nu'}{E'}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y - \frac{1}{E}\sigma_z, & \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G'} \end{cases} \quad (1)$$

ここに、 E' はx方向の縦弾性係数、 G' はx軸を含む面内のせん断弾性係数、 E は等方面となるy-z平面内の縦弾性係数である。また、 ν' は等方面(y-z平面)

内の力によって生ずるx方向の伸縮を表す Poisson 比、 ν は等方面内の Poisson 比をそれぞれ表している。なお、等方面内のせん断弾性係数 G は、 $G = E/2(1+\nu)$ で与えられる。

3. 直交異方性板の支配方程式

式(1)の逆関係式を3次元の力の釣り合い式に代入し、ひずみを (x, y, z) 3方向の変位 (U, V, W) で表すと、直交異方性板の支配方程式を誘導することができる。得られた支配方程式は、等方体に対する Navier の式に対応するものであるが、Navier の式に比べ形が複雑になるため、そのままの形で Fourier 解析を適用すること

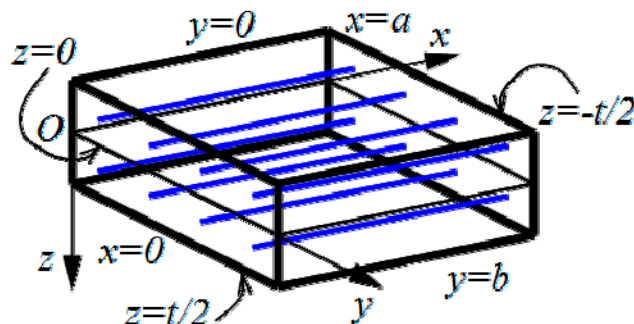


図1. 等方面を有する直交異方性平板

キーワード: 直交異方性板, 等方面, 三次元弾性解析, Fourier 解析

〒326-8558 足利市大前町 268-1 足利工業大学 建築・社会基盤学系 TEL: 0284-22-5681 FAX: 0284-64-1061

は困難である。そこで本研究では、誘導した支配方程式を変形し、次のような連立偏微分方程式を導いた。

$$\begin{cases} \{(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta(1-\nu-2\alpha\nu'^2)(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})\}U + \{\alpha\nu' + \beta(1-\nu-2\alpha\nu'^2)\}\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 & ; \quad \phi \equiv \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \\ \{\beta(1-\nu-2\alpha\nu'^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\alpha(1-\alpha\nu'^2)}{1+\nu}(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})\}\phi + \{\alpha\nu' + \beta(1-\nu-2\alpha\nu'^2)\}(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ \{2\beta(1+\nu)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})\}\psi = \frac{\alpha}{Gt}\frac{\partial\bar{p}_0}{\partial y} & ; \quad \psi \equiv \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \end{cases} \quad (2)$$

ここに、 $\bar{p}_0$ は物体力に対応する板の横荷重、 t は板厚であり、 $\alpha \equiv E/E'$ 、 $\beta \equiv G'/E'$ と置いた。

4. Fourier 解析

本研究では、前節で誘導した支配方程式(2)を Fourier 解析の手法に従って解くことにする。解析対象として周辺単純支持された矩形平板を想定すれば、 (x, y, z) 3 方向の変位 (U, V, W) を次の三角級数で表すことで、板周辺の幾何学的境界条件をあらかじめ満足させることができる

$$U = \sum_k \sum_j U_{jk}(z) \cos \lambda_j x \sin \mu_k y, \quad V = \sum_k \sum_j V_{jk}(z) \sin \lambda_j x \cos \mu_k y, \quad W = \sum_k \sum_j W_{jk}(z) \sin \lambda_j x \sin \mu_k y \quad (3)$$

ただし、 $\lambda_j \equiv j\pi/a$ 、 $\mu_k \equiv k\pi/b$ と置いた。式(3)を式(2)に代入すれば、板厚方向座標 z のみを変数とする 3 個の未定関数 $U_{jk}(z)$ 、 $V_{jk}(z)$ 、 $W_{jk}(z)$ に関する連立常微分方程式が得られる。途中経過の詳細は省略するが、得られた連立常微分方程式を解くことによって、未定関数の一般解として次式が得られる。

$$\begin{cases} U_{jk} = \frac{\lambda_j}{2(1+\nu)\hat{c}} [\{c^*K_1 - 2\beta(1+\nu)\}(A_{jk} \text{sh } {}_1\kappa_{jk}z + B_{jk} \text{ch } {}_1\kappa_{jk}z) + \{c^*K_2 - 2\beta(1+\nu)\}(C_{jk} \text{sh } {}_1\kappa_{jk}z + D_{jk} \text{ch } {}_1\kappa_{jk}z)] \\ V_{jk} = \mu_k (A_{jk} \text{sh } {}_1\kappa_{jk}z + B_{jk} \text{ch } {}_1\kappa_{jk}z + C_{jk} \text{sh } {}_1\kappa_{jk}z + D_{jk} \text{ch } {}_1\kappa_{jk}z) + {}_3\kappa_{jk} (E_{jk} \text{ch } {}_3\kappa_{jk}z + F_{jk} \text{sh } {}_3\kappa_{jk}z) \\ W_{jk} = {}_1\kappa_{jk} (A_{jk} \text{ch } {}_1\kappa_{jk}z + B_{jk} \text{sh } {}_1\kappa_{jk}z) + {}_2\kappa_{jk} (C_{jk} \text{ch } {}_1\kappa_{jk}z + D_{jk} \text{sh } {}_1\kappa_{jk}z) + \mu_k (E_{jk} \text{sh } {}_3\kappa_{jk}z + F_{jk} \text{ch } {}_3\kappa_{jk}z) + \frac{\bar{p}_{jk}^{(0)}}{Gt {}_3\kappa_{jk}^2} \end{cases} \quad (4)$$

ただし、2 つの双曲線関数 $\sinh$ および $\cosh$ をそれぞれ sh および ch と略記し、 $\hat{c} \equiv \alpha\nu' + \beta(1-\nu-2\alpha\nu'^2)$ 、 $c^* \equiv 2\alpha(1-\alpha\nu'^2)$ と置いた。また、 $\bar{p}_{jk}^{(0)}$ は物体力の Fourier 係数、 A_{jk} 、 B_{jk} 、 C_{jk} 、 D_{jk} 、 E_{jk} 、 F_{jk} は任意定数である。式(4)において、3 つのパラメータ ${}_1\kappa_{jk}$ 、 ${}_2\kappa_{jk}$ 、 ${}_3\kappa_{jk}$ は連立常微分方程式を解く過程で得られる特性方程式から決定されるものであり、それぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} {}_1\kappa_{jk}^2 &\equiv K_1\lambda_j^2 + \mu_k^2, & {}_2\kappa_{jk}^2 &\equiv K_2\lambda_j^2 + \mu_k^2, & {}_3\kappa_{jk} &\equiv 2\frac{\beta}{\alpha}(1+\nu)\lambda_j^2 + \mu_k^2 \\ ; \quad K_1 &\equiv \frac{\alpha}{\beta c^*} \{1 - 2\beta(1+\nu)\nu' + \sqrt{1 - 4\frac{\beta}{\alpha}(1+\nu)\hat{c}}\}, & K_2 &\equiv \frac{\alpha}{\beta c^*} \{1 - 2\beta(1+\nu)\nu' - \sqrt{1 - 4\frac{\beta}{\alpha}(1+\nu)\hat{c}}\} \end{aligned} \quad (5)$$

式(4)に含まれる 6 個の任意定数は、板上下面における垂直応力と (x, y) 2 方向のせん断応力に関する 6 個の力学的境界条件から決定することができる。

5. まとめ

等方を有する直交異方性矩形平板の三次元弾性解析を実施し、Fourier 解析の手法を用いて周辺単純支持平板に関する一般解の誘導を行った。板上下面における力学的境界条件を適用することで、全ての任意定数を確定できることを確認した。等方弾性体と異なり、解の誘導課程および導出した一般解がかなり複雑になることが明らかになった。具体的な数値計算例については、発表当日に示す予定である。

参考文献

- 1) S.A. アムバルツミヤン (神谷紀生訳) : 異方弾性板の理論, 森北出版, 1975.
- 2) J. N. Reddy: MECHANICS of LAMINATED COMPOSITE PLATES and SHELLS, 2nd ed., CRC Press, 2004.