

密度の傾斜を考慮した傾斜機能矩形板の三次元弾性解析

大分工業高等専門学校	正 会 員	○名木野晴暢
豊橋技術科学大学	正 会 員	樋口理宏
豊橋技術科学大学	非 会 員	足立忠晴
大同大学	正 会 員	水澤 富 作
北海道大学	F 会 員	三 上 隆

1. まえがき

傾斜機能材料 (Functionally Graded Materials) とは、「空間的に一つの機能から他の機能へと連続的または階段的に変化する一体の材料」と定義されており¹⁾、例えば、ある方向の成分傾斜により、材料特性 (縦弾性係数, ポアソン比, 密度や熱膨張係等) が変化する結合界面が存在しない不均質な複合材料である. 土木構造材料としての傾斜機能材料は, 従来の等質・等方な材料では用いることのできない過酷な環境下での使用が十分に期待できる. しかし, その実用化には, 使用環境に応じた材料の組み合わせ, 期待する機能を発現する成分傾斜分布や構造部材としての力学的挙動をできるだけ正確に把握することが不可欠となる.

本研究では, 構造部材としての傾斜機能矩形板の静力学的特性 (変形特性, 変位・応力分布特性) と材料の不均質性の関係を明らかにすることを目的としており, 本稿では, 自重を受ける傾斜機能矩形板の静力学的特性に与える板厚および縦弾性係数と密度の不均質性の影響について報告する.

2. 基礎方程式と境界条件

図-1 には, 傾斜機能矩形板と直角座標系が示してある. ここで, a, b, h は, それぞれ, 矩形板の長さ, 幅, 厚さであり, u, v, w は, それぞれ, x, y, z 方向の変位成分である. また, 三次元弾性論に従う周面が単純支持された傾斜機能矩形板は微小変形かつ線形弾性であるとし, 自重の影響は面外方向の物体力で考慮する.

傾斜機能材料の不均質性は板厚方向のみに依存するものとし, 本研究では, 縦弾性係数 $E(z)$ と密度 $\rho(z)$ を次のように仮定する.

$$E(z) = E_b \exp \{p(z/h)\}, \quad p = \ln(E_t/E_b) \quad (1)$$

$$\rho(z) = \rho_b \exp \{r(z/h)\}, \quad r = \ln(\rho_t/\rho_b) \quad (2)$$

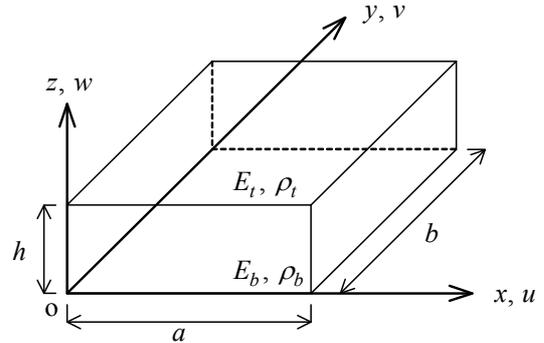


図-1 傾斜機能矩形板, 直角座標系と変位方向の定義

ただし, E_b と E_t および ρ_b と ρ_t は, それぞれ, 矩形板の下面および上面の縦弾性係数および密度である. また, p と r は, それぞれ, 縦弾性係数比 E_t/E_b と密度比 ρ_t/ρ_b に依存する材料の不均質性を表すパラメータである. なお, ポアソン比 ν は一定であると仮定する.

面外方向の物体力の影響を考慮した傾斜機能矩形板の基礎方程式は, 次のように表される.

$$(\mu_b + G_b) \frac{\partial e}{\partial x} + G_b \left\{ \nabla^2 u + \left(\frac{p}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\} = 0,$$

$$(\mu_b + G_b) \frac{\partial e}{\partial y} + G_b \left\{ \nabla^2 v + \left(\frac{p}{h} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} = 0,$$

$$(\mu_b + G_b) \frac{\partial e}{\partial z} + G_b \left\{ \nabla^2 w + 2 \left(\frac{p}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} + \left(\frac{p}{h} \right) \mu_b e + \frac{\rho(z)g}{E(z)} = 0 \quad (3)$$

$$\mu_b = \frac{E_b \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G_b = \frac{E_b}{2(1+\nu)} \quad (4)$$

ここで, ∇^2 は Laplacian, e は体積ひずみであり, g は重力加速度である. また, 矩形板の下面と上面での境界条件は, 次式で与えられる.

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (z=0, \quad z=h) \quad (5)$$

本研究では, 密度の傾斜を考慮した物体力を受ける傾斜機能矩形板の板厚方向に閉じた形式の解析解を導出した. その詳細は, 紙面の都合上割愛する.

キーワード 傾斜機能材料, 矩形板, 密度, 物体力, 三次元弾性論, 解析解

連絡先 〒870-0152 大分市大字牧 1666 番地 大分工業高等専門学校 TEL: 097-552-7691

表-1 傾斜機能矩形厚板の変位と応力の収束性と精度比較： $h/a=0.5, \rho_t/\rho_b=1$

E_t/E_b	$M=N$	$w^*(z/h=0)$	$w^*(z/h=0.5)$	$w^*(z/h=1)$	$\sigma_x^*(z/h=0)$	$\sigma_x^*(z/h=0.5)$	$\sigma_x^*(z/h=1)$
100	101	-5.467×10^{-2}	-5.951×10^{-2}	-5.967×10^{-2}	1.378×10^{-1}	7.821×10^{-1}	-5.986
	201	-5.467×10^{-2}	-5.951×10^{-2}	-5.967×10^{-2}	1.377×10^{-1}	7.821×10^{-1}	-5.986
	301	-5.467×10^{-2}	-5.951×10^{-2}	-5.967×10^{-2}	1.377×10^{-1}	7.821×10^{-1}	-5.986
	FEM	-5.467×10^{-2}	-5.951×10^{-2}	-5.967×10^{-2}	1.383×10^{-1}	7.802×10^{-1}	-5.978
1/100	101	-5.967	-5.951	-5.467	5.986	-7.821×10^{-1}	-1.378×10^{-1}
	201	-5.967	-5.951	-5.467	5.986	-7.821×10^{-1}	-1.377×10^{-1}
	301	-5.967	-5.951	-5.467	5.986	-7.821×10^{-1}	-1.377×10^{-1}
	FEM	-5.967	-5.951	-5.467	5.978	-7.802×10^{-1}	-1.383×10^{-1}

表-2 密度の傾斜を考慮した傾斜機能矩形厚板の変位と応力の収束性： $h/a=0.5, E_t/E_b=100$

ρ_t/ρ_b	$M=N$	$w^*(z/h=0)$	$w^*(z/h=0.5)$	$w^*(z/h=1)$	$\sigma_x^*(z/h=0)$	$\sigma_x^*(z/h=0.5)$	$\sigma_x^*(z/h=1)$
5	101	-1.227×10^{-1}	-1.523×10^{-1}	-1.568×10^{-1}	3.646×10^{-1}	1.876	-1.514×10
	201	-1.227×10^{-1}	-1.523×10^{-1}	-1.568×10^{-1}	3.645×10^{-1}	1.876	-1.514×10
	301	-1.227×10^{-1}	-1.523×10^{-1}	-1.568×10^{-1}	3.645×10^{-1}	1.876	-1.514×10
1/5	101	-3.056×10^{-2}	-2.846×10^{-2}	-2.778×10^{-2}	6.310×10^{-2}	3.989×10^{-1}	-2.900
	201	-3.056×10^{-2}	-2.846×10^{-2}	-2.778×10^{-2}	6.303×10^{-2}	3.989×10^{-1}	-2.900
	301	-3.056×10^{-2}	-2.846×10^{-2}	-2.778×10^{-2}	6.302×10^{-2}	3.989×10^{-1}	-2.900

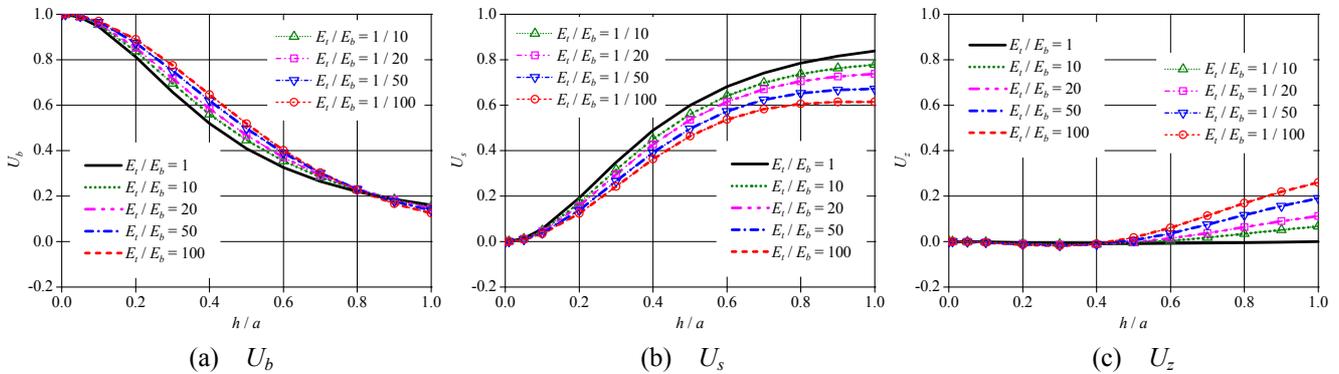


図-4 傾斜機能矩形板の各ひずみエネルギー成分に与える板厚比と縦弾性係数比の影響

3. 理論解析および考察

ここでは、導出した解析解の収束状態と妥当性の検証および傾斜機能板の変形特性について明らかにする。なお、変位、応力およびひずみエネルギーは、次式のように無次元化している。

$$w^* = \frac{wE_b}{q_z a}, \quad \sigma_x^* = \frac{\sigma_x}{q_z}, \quad U_{ij}^* = \frac{U_{ij}E_b}{q_z^2 a^3} \quad (i, j = x, y, z) \quad (6)$$

表-1には、密度を一定分布とした傾斜機能厚板の変位と応力の収束性と精度比較が示してある。参照解は、三次元有限要素解 (FEM) とした。これより、縦弾性係数比 E_t/E_b に係わらず、解析解は級数の展開項数 $M=N$ の増大に伴い、一定の値へ収束する。また、有限要素解は解析解によく類似している。

表-2には、密度の傾斜を考慮した傾斜機能厚板の変位と応力の収束性が示してある。これも密度比 ρ_t/ρ_b に係わらず、解析解は級数の展開項数 $M=N$ の増大に伴い、一定の値へ収束する。以上より、導出した解析解の妥当性が確認できる。

図-3には、傾斜機能矩形板の曲げ変形成分 $U_b = (U_{xx}$

$+ U_{yy} + U_{xy}) / U$ 、面外せん断変形成分 $U_s = (U_{yz} + U_{zy}) / U$ および面外伸縮変形成分 $U_z = U_{zz} / U$ に与える板厚比 h/a と縦弾性係数比 E_t/E_b の影響が示してある。これより、下面と上面の縦弾性係数を入れ替えてもひずみエネルギー特性に与える影響は無いことがわかる。また、傾斜機能材料は、下面と上面の縦弾性係数の値の差が大きくなると、等質・等方な材料 ($E_t/E_b = 1$) よりも曲げ変形成分は増大し、面外せん断変形成分は減少する。さらに、 $h/a \geq 0.5$ なる厚板になると面外伸縮変形成分の影響が現れてくるという特徴がある。

4. まとめ

本稿では、密度の傾斜を考慮した自重を受ける傾斜機能矩形板の静力学的特性の一部を報告した。なお、密度の不均質性の影響等については、当日報告する。

参考文献

1) 上村ら：傾斜機能材料の開発と応用, pp.1-32, シーエムシー出版, 2003.